Σύνολο ασκήσεων 9

Άσκηση 1

(από το βιβλίο των Hoy, M., J. Livernois, C. McKenna, R. Rees and T. Stengos (2001), Mathematics for Economics, MIT Press, Κεφ. 13)

Καταμερισμός χρόνου μελέτης φοιτητή. Έστω ένας φοιτητής που θέλει να κατανείμει το διαθέσιμο χρόνο 25 ωρών την εβδομάδα σε δύο μαθήματα ώστε να μεγιστοποιήσει τη μέση βαθμολογία του. Η βαθμολογία κάθε μαθήματος $B_1, B_2 \in [0, 10]$ είναι συνάρτηση του χρόνου μελέτης t_1, t_2 σε ώρες ανά εβδομάδα και δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις «χρονικής (βαθμολογικής) απόδοσης» για κάθε μάθημα

$$\begin{aligned} B_1 &= 0.5 + 1.7\sqrt{t_1} \\ B_2 &= 1 + 0.3t_2 \end{aligned}$$

Η **αντικειμενική συνάρτηση** $U(t_1, t_2)$, ως συνάρτηση βαθμολογικής χρησιμότητας του χρόνου μελέτης κάθε μαθήματος, δίνεται από τον αριθμητικό μέσο της βαθμολογίας, δηλαδή

$$U(t_1, t_2) = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$$

1. Επιλύστε το πρόβλημα μεγιστοποίησης (μεγιστοποίησης της μέσης βαθμολογίας) και βεβαιώστε ότι το στάσιμο σημείο των **Σ.Π.Τ** αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο.

2. Ποιά η μέγιστη μέση βαθμολογία που μπορεί να επιτευχθεί με τις δεδομένες συναρτήσεις χρονικής απόδοσης και διαθέσιμες ώρες και ποιά η μέγιστη βαθμολογία ανά μάθημα;

3. Ερμηνεύστε τον **πολ/στή Lagrange** στο στάσιμο σημείο. Ένας συμφοιτητής σας, διατείνεται ότι αν αυξήσετε κατά μία ώρα τον διαθέσιμο χρόνο μελέτης θα ξεπεράσετε το 7. Έχει δίκιο; Αντίστοιχα ένας (ασυνεπής) συμφοιτητής σας, διατείνεται ότι αν διαβάσετε 5 ώρες λιγότερο θα επιτύχετε μέση βαθμολογία άνω του 5. Συμφωνείτε;

Άσκηση 2

Η συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas

$$f = AK^aL^b$$

με

$$A, K, L > 0$$

είναι **(i)** αυστηρώς κοίλη ($\Rightarrow$ άρα και) **(ii)** κοίλη ($\Rightarrow$ άρα και) **(iii)** οιονεί κοίλη, όταν οι παράμετροι $a, b > 0$ ικανοποιούν τις ανισότητας:

$$\begin{aligned} (i) &: \ 0 < a < 1 \ , \ 0 < b < 1 \text{ και } 0 < a + b < 1 \\ (ii) &: \ 0 < a \leq 1 \ , \ 0 < b \leq 1 \text{ και } 0 < a + b \leq 1 \\ (iii) &: \ a > 0 \ , \ b > 0 \end{aligned}$$

αντίστοιχα.

1. Ελαχιστοποιείστε τη συνάρτηση κόστους

   $$C = wL + rK$$

   ως προς τις εισροές $L, K > 0$ με ζητούμενο επίπεδο παραγωγής

   $$\bar{Q} = AK^a L^b$$

   ενώ γνωρίζετε ότι $A, w, r > 0$. Βεβαιώστε τις **Σ.Δ.Τ** για **τοπικό ελάχιστο**.

2. Χαρακτηρίστε το στάσιμο σημείο **χωρίς τη χρήση Σ.Δ.Τ** όταν ισχύει η υπόθεση (iii).

3. Χρησιμοποιήστε το **θεώρημα της περιβάλουσας** για να δείξετε ότι μία αύξηση της παραγωγικότητας λόγω π.χ τεχνολογικής προόδου (αύξηση στο A) μειώνει το κόστος με την μείωση να είναι ανάλογη της αύξησης του κόστους από την αύξηση της παραγωγής και ταυτοχρόνως η μείωση είναι μεγαλύτερη για χαμηλότερα επίπεδα ανάπτυξης A.

Απάντηση 2

1. Το πρόβλημα γράφεται

$$\min_{L,K} C = wL + rK$$
$$\text{μ.τ.π}$$
$$AK^a L^b = \bar{Q}$$

Η συνάρτηση Lagrangean είναι

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\left[\bar{Q} - AK^a L^b\right]$$

όπου λ ο πολ/στής Lagrange. Οι **Σ.Π.Τ** δίνονται από τις εξισώσεις $(1),(2),(3)$ παρακάτω

$$(1) : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - a\lambda AK^{a-1}L^b = 0 \Rightarrow a\lambda AK^{a-1}L^b = r$$
$$(2) : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - b\lambda AK^{a}L^{b-1} = 0 \Rightarrow b\lambda AK^{a}L^{b-1} = w$$
$$(3) : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{Q} - AK^a L^b = 0$$

Διαιρώντας τις $(1),(2)$ έχουμε

$$(1)/(2) : \frac{a\lambda AK^{a-1}L^b}{b\lambda AK^{-1}L^{b-1}} = \frac{r}{w} \Rightarrow L = \frac{b}{a}\frac{r}{w}K$$

Αντικατάσταση στην (3) και

$$(3) : \bar{Q} - AK^a L^b = 0 \Rightarrow$$
$$\bar{Q} - AK^a\left(\frac{b}{a}\frac{r}{w}K\right)^b = 0 \Rightarrow$$
$$\bar{Q} - AK^{a+b}\left(\frac{b}{a}\right)^b\left(\frac{r}{w}\right)^b = 0 \Rightarrow$$
$$K^{a+b} = \bar{Q}A^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{-b}\left(\frac{r}{w}\right)^{-b} \Rightarrow$$
$$K^* = \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b}{a+b}}\left(\frac{r}{w}\right)^{-\frac{b}{a+b}}$$

άρα και

$$\begin{aligned} L^* &= \frac{b}{a}\frac{r}{w}K^* \\ &= \frac{b}{a}\frac{r}{w}\left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b}{a+b}}\left(\frac{r}{w}\right)^{-\frac{b}{a+b}} \\ &= \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{a}{a+b}} \\ &= \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}}\left(\frac{w}{r}\right)^{-\frac{a}{a+b}} \end{aligned}$$

Οπότε, στο στάσιμο σημείο έχουμε τις επιλογές (ζήτηση κεφαλαίου και εργασίας)

$$\begin{aligned} K^* &= \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{b}{a+b}}\left(\frac{r}{w}\right)^{-\frac{b}{a+b}} > 0 \\ L^* &= \left(\frac{\bar{Q}}{A}\right)^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}}\left(\frac{w}{r}\right)^{-\frac{a}{a+b}} > 0 \end{aligned}$$

ενώ και

$$\lambda^* = ... = K^{a-1}L^b = \frac{r}{aA}\frac{(K^*)^{1-a}}{(L^*)^b} > 0$$

Σ.Δ.Τ

$$\begin{aligned} \left|H^B\right| &= \begin{vmatrix} 0 & -aAK^{a-1}L^b & -bAK^aL^{b-1} \\ -aAK^{a-1}L^b & -a(a-1)\lambda AK^{a-2}L^b & -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} \\ -bAK^aL^{b-1} & -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} & -b(b-1)\lambda AK^aL^{b-2} \end{vmatrix} \\ &= 0 \times \begin{vmatrix} -a(a-1)\lambda AK^{a-2}L^b & -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} \\ -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} & -b(b-1)\lambda AK^aL^{b-2} \end{vmatrix} \\ &\quad +aAK^{a-1}L^b \times \begin{vmatrix} -aAK^{a-1}L^b & -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} \\ -bAK^aL^{b-1} & -b(b-1)\lambda AK^aL^{b-2} \end{vmatrix} \\ &\quad -bAK^aL^{b-1} \times \begin{vmatrix} -aAK^{a-1}L^b & -a(a-1)\lambda AK^{a-2}L^b \\ -bAK^aL^{b-1} & -ab\lambda AK^{a-1}L^{b-1} \end{vmatrix} \\ &= aAK^{a-1}L^b\left[ab(b-1)A^2\lambda K^{2a-1}L^{2b-2} - ab^2A^2\lambda K^{2a-1}L^{2b-2}\right] \\ &\quad -bAK^aL^{b-1}\left[a^2bA^2\lambda K^{2a-2}L^{2b-1} - ab(a-1)A^2\lambda K^{2a-2}L^{2b-1}\right] \\ &= a^2b(b-1)A^3\lambda K^{3a-2}L^{3b-2} \\ &\quad -a^2b^2A^3\lambda K^{3a-2}L^{3b-2} \\ &\quad -a^2b^2A^3\lambda K^{3a-2}L^{3b-2} \\ &\quad +ab^2(a-1)A^3\lambda K^{3a-2}L^{3b-2} \\ &= \left[a^2b(b-1) - 2a^2b^2 + ab^2(a-1)\right]A^3\lambda K^{3a-2}L^{3b-2} \end{aligned}$$

Στο στάσιμο σημείο

$$\begin{aligned}\left|H^{*B}\right| &= \left[a^2 b\,(b-1) - 2a^2b^2 + ab^2\,(a-1)\right] A^3\lambda^*\,(K^*)^{3a-2}\,(L^*)^{3b-2} \\ &= -\left[\underbrace{ab\,(a+b)}_{(+)}\right]\underbrace{A^3\lambda^*\,(K^*)^{3a-2}\,(L^*)^{3b-2}}_{(+)} < 0\end{aligned}$$

και έχουμε **τοπικό ελάχιστο**, όταν $a > 0$ και $b > 0$.

2. Η συνάρτηση $C = wL + rK$ είναι γραμμική άρα κυρτή άρα και οιονεί κυρτή. Η συνάρτηση του περιορισμού $\bar{Q} = AK^aL^b$ είναι τύπου Cobb-Douglas και είναι οιονεί κοίλη (όταν $a > 0$, $b > 0$) οπότε το στάσιμο σημείο είναι **ολικό ελάχιστο**.

3. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^*}{\partial A} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A}\right|_{K=K^*, L=L^*, \lambda=\lambda^*} = -\lambda^* K^{*a} L^{*b} \\ &= -\lambda^* \frac{\bar{Q}}{A} \\ &= -\left(\frac{\partial C^*}{\partial \bar{Q}}\right)\frac{\bar{Q}}{A} < 0\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Πρόβλημα εύρεσης ...

$$u = U\,(c, l) = 2\sqrt{c} + l - 1$$