Περίγραμμα διάλεξης 8

1 Βελτιστοποίηση, n ανεξάρτητες μεταβλητές και m περιορισμοί

Ένα συχνό πρόβλημα προς επίλυση στην οικονομική θεωρία (εισαγωγικό επίπεδο) είναι η **βελτιστοποίηση** (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μίας πολυμεταβλητής συνάρτησης $f(x_1, ..., x_n)$ υπό ένα σύνολο «περιορισμών» , δηλαδή

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \quad ή \quad \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$$

με τους περιορισμούς (μ.τ.π)

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \ , \ g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+ \tag{1}$$

όπου

- $f(\mathbf{x})$ καλείται **αντικειμενική συνάρτηση**
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ το διάνυσμα των μεταβλητών επιλογής
- $\mathbf{n}$ ο αριθμός των μεταβλητών επιλογής (διάσταση του διανύσματος $\mathbf{x}$)
- $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ **ο αριθμός των περιορισμών**

- **Παρατηρήστε** ότι στη συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν οι μεταβλητές επιλογής θα είναι **μη-αρνητικές** γι'αυτό και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, π.χ. ζήτηση αγαθών, δαπάνη αγαθών, κατανάλωση, ώρες σχόλης ή ώρες εργασίας, ζήτηση κεφαλαίου, ζήτηση εργασίας κτλ.
- **Παρατηρήστε** επίσης ότι σε όλα τα προβλήματα που θα συναντήσουμε $m < n$. Αυτό γιατί όταν $m = n$ τότε είναι δυνατόν να μην χρειάζεται βελτιστοποίηση αφού τα εφικτά σημεία μπορεί να είναι μόνο ένα! (εκεί που ικανοποιείται το σύστημα των περιορισμών) άρα δεν τίθεται θέμα επιλογής ενώ όταν $m > n$ τότε δύναται να μην υπάρχει λύση στην οποία όλοι οι περιορισμοί να ικανοποιούνται ταυτόχρονα.

1.1 Παραδείγματα (οικονομικά)

Για παράδειγμα, αν x_1, x_2 : υποδηλώνουν τις ποσότητες κατανάλωσης δύο αγαθών, p_1, p_2 : τις τιμές τους, M : το διαθέσιμο εισόδημα του καταναλωτή, $\bar{u}$: κάποιο ελάχιστο επιθυμητό επίπεδο χρησιμότητας, K, L : υποδηλώνουν το κεφάλαιο και την εργασία αντίστοιχα, Q : το παραγόμενο προϊόν, w, r : την αμοιβή της εργασίας και το κόστος του κεφαλαίου και $\bar{Q}$: κάποιο ελάχιστο επιθυμητό επίπεδο παραγωγής τότε τα προβλήματα που θα συναντήσουμε λαμβάνουν τη μορφή μεγιστοποίηση χρησιμότητας με εισοδηματικό περιορισμό

$$\max_{x_1,x_2} U(x_1, x_2) \text{ μ.τ.π } p_1x_1 + p_2x_2 = M$$

ελαχιστοποίηση δαπάνης με περιορισμό χρησιμότητας

$$\min_{x_1,x_2} E = p_1x_1 + p_2x_2 \text{ μ.τ.π } U(x_1, x_2) = \bar{u}$$

μεγιστοποίηση παραγωγής με περιορισμό κόστους

$$\max_{K,L} Q(K, L) \text{ μ.τ.π } wL + rK = C$$

ελαχιστοποίηση κόστους με περιορισμό παραγωγής

$$\min_{K,L} wL + rK = C \text{ μ.τ.π } Q(K, L) = \bar{Q}$$

1.2 Επίλυση προβλήματος βελτιστοποίησης με n μεταβλητές επιλογής και $m < n$ περιορισμούς

Αναλυτικά, το πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης γράφεται ως εξής,

$$\max_{x_1,\dots,x_n} f(x_1, ..., x_n) \quad \text{ή} \quad \min_{x_1,\dots,x_n} f(x_1, ..., x_n)$$

$$\text{μ.τ.π}$$

$$g^{(1)}(x_1, ..., x_n) = b_1$$

$$\vdots$$

$$g^{(m)}(x_1, ..., x_n) = b_m$$

Παράδειγμα 1

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 4x_1$$

$$\text{μ.τ.π}$$

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = b_1 \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 60$$

Παράδειγμα 2

$$\min_{x_1,x_2} f(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{μ.τ.π}$$

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = b_1 \Rightarrow x_1 + 4x_2 = 2$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα **βελτιστοποίησης με περιορισμούς**

1. σχηματίζουμε τη **συνάρτηση Lagrange** ως

$$\mathcal{L} = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g^{(i)}(x_1, ..., x_n)\right]$$

όπου $\lambda_\mathbf{i}$, $i = 1, ...m$ καλούνται **πολλαπλασιαστές Lagrange**. Οι συγκεκριμένοι πολ/στές παίζουν το ρόλο ψευδομεταβλητών στο πρόβλημα και βοηθούν στην επίλυσή του χωρίς να καταφύγουμε σε αντικατάσταση των περιορισμών στην αντικειμενική συνάρτηση. **Σημειώστε όμως, ότι οι πολ/στές Lagrange έχουν και «κατάλληλη» οικονομική ερμηνεία**

2. επιλύουμε τις **Σ.Π.Τ** του προβλήματος

$$\max_{x_1,...,x_n \text{ και } \lambda_1,...,\lambda_n} \mathcal{L} \quad \textbf{ή} \quad \min_{x_1,...,x_n \text{ και } \lambda_1,...,\lambda_n} \mathcal{L}$$

για να βρούμε το στάσιμο σημείο $\mathbf{x}^*$ αλλά και τις τιμές των **πολ/στών Lagrange** λ_i^*, γιά $i = 1, ...m$ στο στάσιμο σημείο

3. χρησιμοποιούμε

A. **είτε Σ.Δ.Τ** για να χαρακτηρίσουμε το στάσιμο σημείο (σε αυτή τη διάλεξη θα αναφερθούμε λεπτομερώς στην **φραγμένη Εσσιανή** και τη συγκεκριμένη μεθοδολογία)

B. **είτε** υιοθετούμε ιδιότητες σχετικά με την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς που βεβαιώνουν μοναδικό και ολικό ή ολικό μέγιστο (ελάχιστο) (π.χ. θα γίνει εισαγωγή στην **οιονεί-κοιλότητα της αντικειμενικής συνάρτησης** και την **οιονεί-κυρτότητα των περιορισμών** σε επόμενη διάλεξη - βλ. **Διάλεξη 9**)

1.3 Σ.Π.Τ (συνθήκες πρώτης τάξης ή αναγκαίες συνθήκες για τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο)

Οι συνθήκες πρώτης τάξης (αναγκαίες για την εύρεση του στάσιμου σημείου) δίνονται από $n + m$ εξισώσεις, η λύση των οποίων δίνει **το στάσιμο σημείο** $x_1^*, ..., x_n^*$ (και την τιμή λ^* ή τιμές λ_i^* που λαμβάνουν οι **πολ/στές Lagrange** στο συγκεκριμένο στάσιμο σημείο)

Λύνουμε τις παρακάτω $n + m$ εξισώσεις

$$n \text{ εξισώσεις } \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \right.$$

$$m \text{ εξισώσεις } \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \right.$$

1.4 Σ.Δ.Τ (συνθήκες δεύτερης τάξης ή ικανές συνθήκες για τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο)

Οι συνθήκες δεύτερης τάξης, ικανές για το χαρακτηρισμό του στάσιμου σημείου $x_1^*, ..., x_n^*$ - και $f(x_1^*, ..., x_n^*)$ - ως **τοπικό μέγιστο** (**ή τοπικό ελάχιστο**) δίνονται όπως παρακάτω για τη γενική $n \geq 2$, $m \geq 1$ περίπτωση.

- **Σημείωση:** σπανίως χρησιμοποιούνται συνθήκες αυτές στην πράξη όταν $n > 2$ αφού, αλγεβρικά, η επιβεβαίωσή τους καθίσταται πολύ απαιτητική ενώ όπως θα δούμε υπάρχουν και άλλοι τρόποι βεβαίωσης ύπαρξης ακρότατου σημείου στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Κατασκευάζουμε τη **φραγμένη Εσσιανή μήτρα (Bordered Hessian)** διαστάσεων $(m+n) \times (m+n)$ ως εξής

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_1^{(1)} & \cdots & g_n^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_1^{(m)} & \cdots & g_n^{(m)} \\ g_1^{(1)} & \cdots & g_1^{(m)} & \mathcal{L}_{11} & \cdots & \mathcal{L}_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^{(1)} & \cdots & g_n^{(m)} & \mathcal{L}_{n1} & \cdots & \mathcal{L}_{nn} \end{bmatrix}$$

όπου $g_i^{(m)} = \dfrac{\partial g^{(m)}}{\partial x_i}$ και $\mathcal{L}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_j \partial x_i}$ **ενώ** H^{B*} θα συμβολίζει υπολογισμό της φραγμένης Εσσιανής στο στάσιμο σημείο.

- Αν οι τελευταίες, $(n-m)$ στον αριθμό, **πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες** υπολογισμένες στο στάσιμο σημείο εναλλάσσονται πρόσημο με το πρόσημο της τελευταίας ορίζουσας να είναι $(-1)^n$ τότε έχουμε **τοπικό μέγιστο** στο $\mathbf{x}^*$
  - π.χ. $n = 2, m = 1$ τότε $n - m = 1$ και ελέγχουμε μόνο μία ορίζουσα, συγκεκριμένα την τελευταία, πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα

    $$\left|H_n^{B*}\right|$$

    η οποία είναι ουσιαστικά η ορίζουσα της φραγμένης Εσσιανής υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο $\left|H_n^{B*}\right| = \left|H^{B*}\right|$.
  - π.χ. $n = 3, m = 1$ τότε $n - m = 2$ και ελέγχουμε μόνο δύο πρώτιστες κύριες ελάσσονες ορίζουσες, συγκεκριμένα την προτελευταία και τελευταία πρώτιστη κύρια ελάσσονα ορίζουσα

    $$\left|H_{n-1}^{B*}\right| \quad , \quad \left|H_n^{B*}\right|$$

- Αν οι τελευταίες $n-m$ κύριες ελάσσονες ορίζουσες έχουν το ίδιο πρόσημο με $(-1)^m$ τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι **τοπικό ελάχιστο**.

Για ευκολία να θυμάστε ότι H_2^B είναι η φραγμένη Εσσιανή με κάτω δεξιά στοιχείο το $\mathcal{L}_{22}$, H_3^B είναι η φραγμένη Εσσιανή με κάτω δεξιά στοιχείο το $\mathcal{L}_{33}$, κ.ο.κ.
Συνοπτικά, οι παραπάνω κανόνες γράφονται ως

- Αν $(-1)^r \left|H_r^{B,*}\right| > 0$ γιά $r = m+1, ..., n$ **τοπικό μέγιστο**
- Αν $(-1)^m \left|H_r^{B,*}\right| > 0$ γιά $r = m+1, ..., n$ **τοπικό ελάχιστο**

Για παράδειγμα, στις κλασσικές ασκήσεις που θα μας απασχολήσουν, έχουμε **δύο μεταβλητές** επιλογής $n = 2$ και **έναν περιορισμό** $m = 1$ άρα το $r = 2$ και $(-1)^2 \left|H_2^{B,*}\right| > 0$ όταν $\left|H_2^{B,*}\right| > 0$ ενώ $(-1)^1 \left|H_2^{B,*}\right| > 0$ όταν $\left|H_2^{B,*}\right| < 0$ άρα στα προβλήματα με $n = 2$ και $m = 1$,

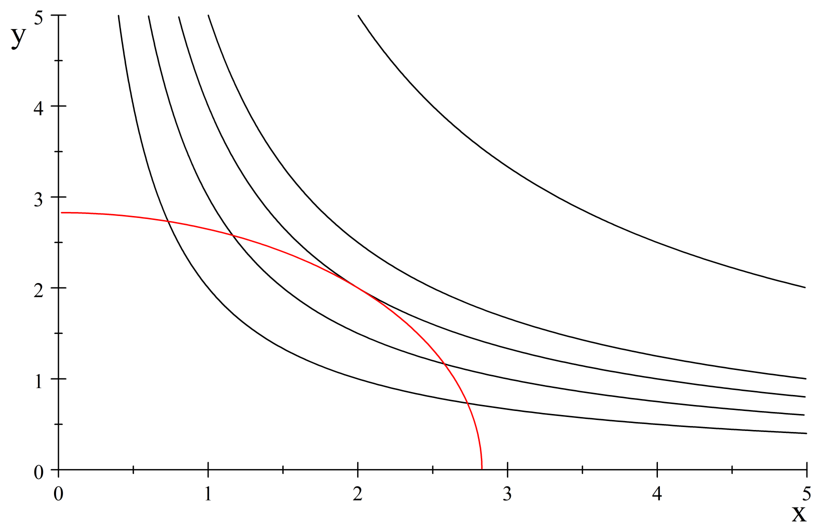
- Αν $\left|H_2^{B,*}\right| > 0$ τότε έχουμε **τοπικό μέγιστο**
- Αν $\left|H_2^{B,*}\right| < 0$ τότε έχουμε **τοπικό ελάχιστο**

1.4.1 Άσκηση

Λύστε τις παρακάτω δύο ασκήσεις (**Σ.Π.Τ** και χαρακτηρισμός στάσιμου σημείου μέσω **Σ.Δ.Τ**). Για **υποβοήθηση** δίνονται δύο γραφήματα που οπτικοποιούν το πρόβλημα αλλά και τη λύση του!.

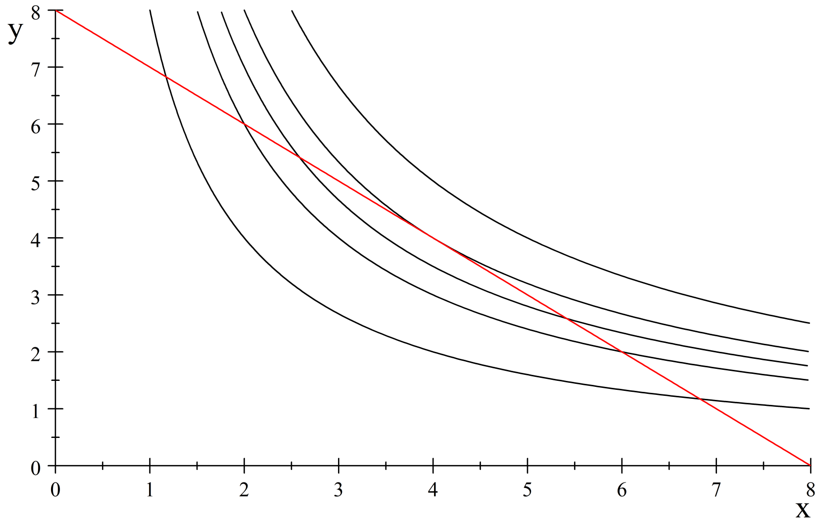
Εξάσκηση 1

$$\begin{aligned} \max_{x,y} f(x,y) &= xy \ \ \text{μ.τ.π} \ \ x^2+y^2=8 \\ x,y &> 0 \end{aligned}$$



Εξάσκηση 2

$$
\begin{aligned}
\max_{x,y} f(x,y) &= xy \text{ μ.τ.π } x+y=8 \\
x, y &> 0
\end{aligned}
$$



1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα ΣΔΤ. Περίπτωση $n = 2, m = 1$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix}$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό μέγιστο

$$\left|H_2^{B,*}\right| = \left.\begin{vmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{vmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} > 0$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό ελάχιστο

$$\left|H_2^{B,*}\right| = \left.\begin{vmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{vmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} < 0$$

Παράδειγμα ΣΔΤ. Περίπτωση $n = 3, m = 1$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3^{(1)} & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{bmatrix}$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό μέγιστο

$$\left|H_3^{B,*}\right| = \left.\begin{vmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3^{(1)} & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{vmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} < 0$$

και

$$\left|H_2^{B,*}\right| = \left.\begin{vmatrix} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{vmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} > 0$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό ελάχιστο

$\left|H_3^{B,*}\right| < 0, \left|H_2^{B,*}\right| < 0.$

Παράδειγμα ΣΔΤ. Περίπτωση $n = 3, m = 2$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} \\ 0 & 0 & g_1^{(2)} & g_2^{(2)} & g_3^{(2)} \\ g_1^{(1)} & g_1^{(2)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2^{(1)} & g_2^{(2)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3^{(1)} & g_3^{(2)} & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{bmatrix}$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό μέγιστο

$$\left|H_3^{B,*}\right| = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & g_3^{(1)} \\ 0 & 0 & g_1^{(2)} & g_2^{(2)} & g_3^{(2)} \\ g_1^{(1)} & g_1^{(2)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2^{(1)} & g_2^{(2)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3^{(1)} & g_3^{(2)} & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{matrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} < 0$$

Σ.Δ.Τ: Τοπικό ελάχιστο $\left|H_3^{B,*}\right| > 0$

2 Παράδειγμα: Διαχρονική επιλογή (intertemporal choice)

- Έστω μία εξαιρετικά απλή οικονομία όπου ο αντιπροσωπευτικός καταναλωτής «ζει» δύο χρονικές περιόδους, την περίοδο 1 και την περίοδο 2 (η οποία έπεται της πρώτης). Άρα χρόνος : $1 \rightarrow 2$
- Έστω $r \in (0, 1)$ το επιτόκιο δανεισμού στην οικονομία. Άρα κάποιος που καταθέτει 1 χρηματική μονάδα (έστω ευρώ €) στην τράπεζα την πρώτη περίοδο λαμβάνει $1 + r$ τη δεύτερη περίοδο, π.χ. $r = 0.035$ σημαίνει ονομαστικό επιτόκιο 3.5%
- Έστω ότι S συμβολίζει αποταμίευση στο χρόνο 1
- Έστω ότι M_i συμβολίζει εισόδημα (συνολικό από εργασία, πλούτο κτλ) στο χρόνο $i = 1, 2$
- Έστω p_1 το γενικό επίπεδο τιμών την πρώτη χρονική περίοδο (π.χ. ο Δείκτης Τιμών Καταναλωτή εκφράζει την τιμή της κατανάλωσης ενός αντιπροσωπευτικού καλαθιού αγαθών, περίπου 180 εξειδικευμένες ομάδες αγαθών στην Ελλάδα με στάθμιση η οποία αντικατοπτρίζει τη σχετική δαπάνη των νοικοκυριών για τα αγαθά. Στην Ελλάδα βασίζεται στην Έρευνα Οικογενειακού Προϋπολογισμού, βλ. ΕΛ.ΣΤΑΤ)
- Έστω ότι p_2 το επίπεδο τιμών την περίοδο 2

Στάδιο 1. Κατασκευή διαχρονικού εισοδηματικού περιορισμού. Θα διαπιστώσουμε ότι μπορεί να λάβει δύο *ισοδύναμες* μορφές ανάλογα με το αν *προεξοφλούμε το μέλλον στο παρόν ή προβάλλουμε το παρόν στο μέλλον.*

Αναλυτικά, θεωρούμε ότι την πρώτη χρονική περίοδο

$$p_1 c_1 + S = M_1$$

δηλαδή η δαπάνη για κατανάλωση $p_1 c_1$ και η αποταμίευση S εξαντλούν το διαθέσιμο εισόδημα M_1. Ένα μέρος του εισοδήματος της πρώτης περιόδου M_1 καταναλώνεται και το υπόλοιπο αποταμιεύεται.

Αντίστοιχα τη δεύτερη χρονική περίοδο η δαπάνη για κατανάλωση $p_2 c_2$ εξαντλεί το διαθέσιμο εισόδημα M_2 καθώς και *τις απολαβές της αποταμίευσης* από την πρώτη περίοδο $S(1 + r)$. Επειδή δεν υπάρχει τρίτη περίοδος, δεν αποταμιεύουμε. Για ευκολία, δεν υπάρχουν μεταβιβαστικές πληρωμές.

Άρα ισχύει ότι

$$p_2 c_2 = M_2 + S(1 + r)$$

Αντικαθιστούμε την αποταμίευση S στον περιορισμό της πρώτης περιόδου με το ισοδύναμό της από τον περιορισμό της δεύτερης περιόδου και καταλήγουμε στο διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό σε μορφή **παρούσας αξίας**

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{(1 + r)} = M_1 + \frac{M_2}{(1 + r)} \quad \text{Παρούσα Αξία}$$

όπου: p_1c_1 αξία κατανάλωσης την περίοδο 1, $\frac{p_2c_2}{(1+r)}$ αξία μελλοντικής κατανάλωσης την περίοδο 1, M_1 εισόδημα την περίοδο 1, $\frac{M_2}{(1+r)}$ εισόδημα δεύτερης περιόδου την περίοδο 1.

Πολ/ντας με $(1+r)$ όλα τα σκέλη καταλήγουμε στο διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό σε μορφή **μελλοντικής αξίας**

$$(1+r)\,p_1c_1 + p_2c_2 = (1+r)\,M_1 + M_2 \quad \text{Μελλοντική αξία}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό στη μορφή της **παρούσας αξίας**

$$p_1c_1 + \frac{p_2c_2}{(1+r)} = M_1 + \frac{M_2}{(1+r)}$$

ή περιεκτικά

$$g\left(c_1, c_2; p_1, p_2, r\right) = M\left(M_1, M_2, r\right)$$

Παρατηρήστε ότι ο **πληθωρισμός** π δηλαδή η ποσοστιαία μεταβολή του επιπέδου των τιμών από την περίοδο 1 στην περίοδο 2 δίνεται από

$$\pi = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} - 1$$

Για αλγεβρική ευκολία θεωρήστε το επίπεδο τιμών την πρώτη περίοδο είναι ίσο με 1 (τυποποίηση), δηλαδή $p_1 = 1$, τότε ο πληθωρισμός δίνεται απλά ως

$$\pi = p_2 - 1$$
$$\text{ή}$$
$$p_2 = 1 + \pi$$
$$\text{με την τυποποίηση ότι } p_1 = 1$$

Συνεπώς, ο διαχρονικός εισοδηματικός περιορισμός γράφεται στη μορφή

$$c_1 + \frac{(1+\pi)\,c_2}{(1+r)} = M_1 + \frac{M_2}{(1+r)}$$

Η παραπάνω έκφραση δύναται να απλοποιηθεί περισσότερο αντικαθιστώντας το **ονομαστικό επιτόκιο** με το **πραγματικό επιτόκιο**, δηλαδή το επιτόκιο της οικονομίας αφού αφαιρέσουμε την επίδραση του πληθωρισμού.

Έστω ότι ρ συμβολίζει **πραγματικό επιτόκιο**. Αν αποταμιεύσουμε τη περίοδο 1 μία χρηματική μονάδα τότε «ονομαστικά» τη περίοδο 2 θα λάβουμε $(1+r)\times 1$ μονάδες. Πόσο θα λάβουμε όμως σε «πραγματικούς» ή αποπληθωρισμένους όρους όταν στην οικονομία παρατηρείται μη-μηδενικός πληθωρισμός τιμών;

Τη συγκεκριμένη ποσότητα πρέπει να τη διαιρέσουμε με τον πληθωρισμό ο οποίος μειώνει την αγοραστική δύναμη της μίας χρηματικής μονάδας τη περίοδο 2. Για παράδειγμα, αν ο πληθωρισμός π ήταν ίσος με το ονομαστικό επιτόκιο r τότε δεν έχουμε *«κερδίσει τίποτα»* από την αποταμίευση αφού

$$\frac{1+r}{1+\pi} = \frac{1+r}{1+r} = 1$$

άρα σε πραγματικούς όρους η αγοραστική δύναμη παρέμεινε ίδια.

Αν $\pi > r$, ο πληθωρισμός είναι μεγαλύτερος του επιτοκίου και χάνουμε σε αγοραστική δύναμη

$$\frac{1+r}{1+\pi} < 1$$

ενώ αν $\pi < r$, το ονομαστικό επιτόκιο είναι μεγαλύτερο του πληθωρισμού και η πραγματική (επιτοκιακή) απόδοση

$$1+\rho = \frac{1+r}{1+\pi} > 1$$

είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Οπότε έχουμε τη σχέση

$$1+\rho = \frac{1+r}{1+\pi} \Rightarrow \frac{1}{1+\rho} = \frac{1+\pi}{1+r}$$

$$\begin{aligned} 1+\rho &> 0 \text{ , Θετικό πραγματικό επιτόκιο} \\ 1+\rho &< 0 \text{ , Αρνητικό πραγματικό επιτόκιο} \end{aligned}$$

Η τελική μορφή του διαχρονικού εισοδηματικού περιορισμού μετά την αντικατάσταση του πραγματικού επιτοκίου δίνεται από

$$c_1 + \frac{c_2}{1+\rho} = M_1 + \frac{M_2}{1+r}$$

Στάδιο 2. Συνάρτηση χρησιμότητας. Έστω ότι η διαχρονική συνάρτηση χρησιμότητας έχει τη «προσθετική» μορφή[1]

$$U(c_1, c_2; \beta) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$$

όπου β δηλώνει τον υποκειμενικό παράγοντα προεξόφλησης[2] με $0 < \beta \leq 1$.

Για παράδειγμα, όταν $\beta \approx 0$ η κατανάλωση της δεύτερης περιόδου συνεισφέρει ελάχιστα στην χρησιμότητα ενώ αν $\beta = 1$ τότε έχει ακριβώς την ίδια στάθμιση (μονάδα) με την τωρινή κατανάλωση.

Η προσθετική μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας

$$U(c_1, c_2; \beta) = u(c_1) + \beta u(c_2)$$

είναι πιό περιοριστική μίας γενικότερης μορφής (π.χ. πολλαπλασιαστικής) $U(c_1, c_2; \beta)$ αφού «αναγκάζουμε» τον καταναλωτή να έχει την ίδια συνάρτηση χρησιμότητας κάθε χρονική περίοδο.

[1]Ο συμβολισμός $U(c_1, c_2; \beta)$ «δείχνει» δύο μεταβλητές επιλογής, την κατανάλωση την περίοδο $1 : c_1$, και την κατανάλωση την περίοδο $2 : c_2$, καθώς και μία παράμετρο την β. Το Ελληνικό ερωτηματικό ; συνήθως «ξεχωρίζει» τις μεταβλητές από τις παραμέτρους της συνάρτησης.

[2]Βαθμός ανυπομονησίας νοικοκυριού ή αντιπροσωπευτικού καταναλωτή.

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση δίνεται από την

$$U(c_1, c_2; \beta) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση **Lagrange**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= U(c_1, c_2; \beta) + \lambda \left[M_1 + \frac{M_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+\rho} \right] \\ &= \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \lambda \left[M_1 + \frac{M_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+\rho} \right]\end{aligned}$$

Οι Σ.Π.Τ δίνονται από

$$\begin{aligned}(1) &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow U_1 - \lambda = 0 \\ (2) &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow U_2 - \frac{\lambda}{1+\rho} = 0 \\ (3) &: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow M_1 + \frac{M_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+\rho} = 0\end{aligned}$$

όπου U_1 συμβολίζει την πρώτη μερική παράγωγο ως προς c_1 και U_2 την πρώτη μερική παράγωγο ως προς c_2.

Διαιρώντας (1)/(2) έχουμε τη σχέση ισορροπίας

$$\frac{U_1}{U_2} = (1+\rho) \Rightarrow U_1 = (1+\rho) U_2$$

Η χρησιμότητα που χάνω αν αποποιηθώ παρούσα κατανάλωση πρέπει να είναι ίση με την πραγματική χρησιμότητα που κερδίζω από την επιπλέον κατανάλωση την περίοδο 2.

Αναλυτικά, το στάσιμο σημείο από τη λύση των Σ.Π.Τ έχει ως εξής

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_1} = \lambda \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{c_2} = \frac{\lambda}{(1+\rho)} \Rightarrow c_2 = \frac{\beta(1+\rho)}{\lambda}$$

Διαιρούμε και

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\beta(1+\rho)}{\lambda}} \Rightarrow c_2 = \beta(1+\rho) c_1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow M_1 + \frac{M_2}{1+r} - c_1 - \frac{\beta(1+\rho) c_1}{(1+\rho)} = 0 \\ &\Rightarrow \\ c_1^* &= \frac{1}{1+\beta} \left[M_1 + \frac{M_2}{1+r} \right] \\ c_2^* &= \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right) (1+\rho) \left[M_1 + \frac{M_2}{1+r} \right]\end{aligned}$$

ενώ

$$\lambda^* = \left(\frac{1}{1+\beta}\left[M_1 + \frac{M_2}{1+r}\right]\right)^{-1}$$

Σ.Δ.Τ. Έχουμε δύο μεταβλητές επιλογής, τις c_1, c_2 και έναν περιορισμό (τον διαχρονικό εισοδηματικό περιορισμό), οπότε η **φραγμένη Εσσιανή μήτρα** λαμβάνει τη μορφή

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{1+\rho} \\ 1 & -\frac{1}{c_1^2} & 0 \\ \frac{1}{1+\rho} & 0 & -\frac{\beta}{c_2^2} \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσά της είναι ίση με

$$\begin{aligned} \left|H^B\right| &= \\ &= 0 \times \begin{vmatrix} -\frac{1}{c_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{c_2^2} \end{vmatrix} - (1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1+\rho} & -\frac{\beta}{c_2^2} \end{vmatrix} \\ &\quad + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \times \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{c_1^2} \\ \frac{1}{1+\rho} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\beta}{c_2^2} + \frac{1}{(1+\rho)^2}\frac{1}{c_1^2} \end{aligned}$$

Άρα η ορίζουσα της **φραγμένης Εσσιανής** στο στάσιμο σημείο είναι θετική

$$\left|H_*^B\right| = \frac{\beta}{c_2^{*2}} + \frac{1}{(1+\rho)^2}\frac{1}{c_1^{*2}} > 0$$

οπότε το στάσιμο σημείο

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{1}{1+\beta}\left[M_1 + \frac{M_2}{1+r}\right] \\ c_2^* &= \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1+\rho)\left[M_1 + \frac{M_2}{1+r}\right] \end{aligned}$$

αντιστοιχεί σε **τοπικό μέγιστο**. Επειδή η Σ.Δ.Τ ισχύει για οποιοδήποτε c_1, c_2 πόσο μάλλον για θετικά επίπεδα κατανάλωσης $c_1, c_2 > 0$ (θυμηθείτε ότι η συνάρτηση χρησιμότητας περιορίζεται στο θετικό τεταρτημόριο), το μέγιστο είναι **ολικό** και φυσικά είναι και μοναδικό (βρήκαμε «μόνο» ένα στάσιμο σημείο).

2.1 Πιστοποίηση περιορισμού

Η προϋπόθεση της «Πιστοποίησης Περιορισμού» (*constraint qualification*). Θα πρέπει η $n \times m$ μήτρα των πρώτων παραγώγων των περιορισμών (Ιακωβιανή μήτρα) $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ ή για ευκολία[3] $g'(\mathbf{x}^*)$ υπολογισμένη στο βέλτιστο σημείο να είναι

[3]Προσοχή ο τόνος υποδηλώνει παραγώγιση όχι αναστροφή

βαθμού m, δηλαδή πλήρους βαθμού (*που σημαίνει ότι οι περιορισμοί είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι στο στάσιμο σημείο* $\mathbf{x}^*$ *και κανένας δεν είναι πλεονάζων*).

- **Παρατήρηση.** Στις ασκήσεις που θα συναντήσουμε έχουμε συνήθως έναν μόνο περιορισμό $m = 1$ άρα η διάσταση της Ιακωβιανής μήτρας $g'(\mathbf{x}^*)$ είναι $n \times m = n \times 1$. Στη περίπτωση αυτή ελέγχουμε αν το $n \times 1$ διάνυσμα $g'(\mathbf{x}^*)$ είναι διάφορο του μηδενός, $g'(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$, δηλαδή θα πρέπει να μην είναι όλα τα στοιχεία του διανύσματος $g'(\mathbf{x}^*)$ μηδενικά.

- **Παρατήρηση.** Συνήθως στα προβλήματα που θα συναντήσουμε ο γραμμικός περιορισμός δίνει Ιακωβιανή μήτρα $g'(\mathbf{x}^*)$ με στοιχεία ανεξάρτητα του $\mathbf{x}^*$ και μη μηδενικά. Για παράδειγμα, ο εισοδηματικός περιορισμός
$$p_1x_1 + p_2x_2 = M$$
όπου
$$g(\mathbf{x}) = p_1x_1 + p_2x_2$$
δίνει
$$\underbrace{g'(\mathbf{x}^*)}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

2.2 Θεώρημα Περιβάλλουσας

- Το συγκεκριμένο θεώρημα μας διευκολύνει αλγεβρικά σε μεγάλο βαθμό όταν θέλουμε να προβούμε σε συγκριτική στατική ανάλυση και ειδικότερα όταν θέλουμε να παραγωγίσουμε τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς μία παράμετρο.

- **Ως απόρροια, δίνει μια συγκεκριμένη οικονομική ερμηνεία στον πολλαπλασιαστή Lagrange** λ.

Παρατήρηση. Η τιμή της **αντικειμενικής συνάρτησης** $f(\mathbf{x})$ στο βέλτιστο $f(\mathbf{x}^*)$ καλείται και **συνάρτηση αξίας (value function)**. Στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση χρησιμότητας $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ τότε η ποσότητα $u(\mathbf{x}^*)$ καλείται **έμμεση χρησιμότητα** (indirect utility).

Θεώρημα Περιβάλλουσας (envelope theorem)
Έστω ότι x^* είναι το στάσιμο σημείο ενός προβλήματος βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange. Αντίστοιχα, έστω λ^* οι πολ/στές Lagrange στο στάσιμο σημείο. Έστω ότι $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ είναι ένα $k \times 1$ διάνυσμα παραμέτρων που περιλαμβάνει παραμέτρους (και εξωγενείς μεταβλητές) τόσο της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ όσο και των περιορισμών $g(x) - b = 0$. Αν οι $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις του διανύσματος θ (δηλαδή των στοιχείων του διανύσματος) και η «πιστοποίηση περιορισμού» ισχύει τότε η (ολική) μεταβολή που υφίσταται η συνάρτηση αξίας από μία μεταβολή της παραμέτρου θ δίνεται από
$$\frac{df\left(\mathbf{x}^*(\theta);\theta\right)}{d\theta} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*}$$

δηλαδή είναι ίση με την μερική παράγωγο της συνάρτησης Lagrange $\mathcal{L}$ ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων θ θεωρώντας τα x και λ ανεξάρτητα της παραμέτρου και κατόπιν αντικαθιστούμε στην μερική παραγώγιση της $\mathcal{L}$ τις τιμές $x = x^*$ και $\lambda = \lambda^*$.

Άρα για κάθε μία παράμετρο που ανήκει στο θ:

$$\frac{df\left(\mathbf{x}^*(\theta);\theta\right)}{d\theta_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} \quad , \quad i = 1, ..., k$$

2.3 Παράδειγμα με θεώρημα περιβάλλουσας

Ας δούμε ένα παράδειγμα και πώς το θεώρημα διευκολύνει την αλγεβρική ανάλυση αλλά και την ερμηνεία του **πολ/στή Lagrange**. Έστω η παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας τύπου Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} U\left(x_1, x_2\right) &= x_1^a x_2^\beta \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{R}_+ \\ a, \beta &\in \mathbb{R}_{++} \end{aligned}$$

και ένας **γραμμικός εισοδηματικός περιορισμός**

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &= M \\ p_1, p_2, M &\in \mathbb{R}_{++} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$g^{(1)} = M$$

Έχουμε λοιπόν ότι το διάνυσμα παραμέτρων και εξωγενών μεταβλητών (αναφέρεται ως θ παραπάνω) δίνεται από

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & p_1 & p_2 & M \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση Lagrange - για το παραπάνω πρόβλημα **μεγιστοποίησης χρησιμότητας με εισοδηματικό περιορισμό** - δίνεται από

$$\mathcal{L} = x_1^a x_2^\beta + \lambda\left[M - p_1 x_1 - p_2 x_2\right]$$

με το στάσιμο σημείο να προκύπτει από τη λύση των **Σ.Π.Τ**

$$\begin{aligned} (1) \quad &: \quad \mathcal{L}_1 = a x_1^{a-1} x_2^\beta - \lambda p_1 = 0 \\ (2) \quad &: \quad \mathcal{L}_2 = \beta x_1^a x_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0 \\ (3) \quad &: \quad \mathcal{L}_\lambda = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα **διαιρώντας** τις πρώτες **δύο** εξισώσεις των Σ.Π.Τ (1)/(2) έχουμε ότι

$$\frac{a x_1^{a-1} x_2^\beta}{\beta x_1^a x_2^{\beta-1}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{a}\frac{p_1}{p_2} x_1$$

οπότε με αντικατάσταση στην Σ.Π.Τ με αριθμό (3):

$$M - p_1 x_1 - p_2 \left(\frac{\beta}{a} \frac{p_1}{p_2} x_1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1^* = \frac{a}{a+\beta} \frac{M}{p_1}$$

και

$$x_2^* = \frac{\beta}{a+\beta} \frac{M}{p_2}$$

ενώ ο **πολ/στής Lagrange** λαμβάνει την - πιο σύνθετη αλγεβρικά - τιμή

$$\lambda^* = \frac{a^a \beta^\beta}{(a+\beta)^{a+\beta-1}} \frac{M^{a+\beta-1}}{p_1^a p_2^\beta}$$

Οι λύσεις για την βέλτιστη **ζήτηση** των δύο αγαθών

$$x_i^* = x_i^* \left(a, \beta, M, p_1, p_2 \right)$$

καλούνται και **ζητήσεις Marsall ή Walras ή μη-αποζημιωμένες ζητήσεις (Marsalian ή Walrasian ή uncompensated demand function)**.

Παρατηρήστε τη **συμμετρία!** στη ζήτηση η οποία εξαρτάται από παραμέτρους **προτιμήσεων** a, β, **το εισόδημα** M **και τις τιμές** p_1, p_2.

Οι ΣΔΤ για **τοπικό μέγιστο** $\left| H_2^{B,*} \right| > 0$ ικανοποιούνται όταν (βεβαιώστε το) $a, \beta > 0$ και $a, \beta \leq 1$ αφού πρέπει

$$\left| H_2^{B,*} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} \\ g_1^{(1)} & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2^{(1)} & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{array} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \left| \begin{array}{ccc} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & U_{11} & U_{12} \\ p_2 & U_{21} & U_{22} \end{array} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

$$= 0 \left| \begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} - p_1 \left| \begin{array}{cc} p_1 & U_{12} \\ p_2 & U_{22} \end{array} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} + p_2 \left| \begin{array}{cc} p_1 & U_{11} \\ p_2 & U_{21} \end{array} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

$$= -p_1 \left(p_1 U_{22}^* - p_2 U_{12}^* \right) + p_2 \left(p_1 U_{21}^* - p_2 U_{11}^* \right) =$$

$$= -p_1^2 U_{22}^* + 2 p_1 p_2 U_{12}^* - p_2^2 U_{11}^* > 0$$

το οποίο ισχύει (η θετικότητα της $\left|H_2^{B,*}\right| > 0$) όταν

$$\begin{aligned}
U_{11}^* &= a\left(a-1\right)\left(x_1^*\right)^{\alpha-2}\left(x_2^*\right)^{\beta} < 0 \\
U_{22}^* &= \beta\left(\beta-1\right)\left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(x_2^*\right)^{\beta-2} < 0 \\
&\quad \text{και} \\
U_{12}^* &= a\beta\left(x_1^*\right)^{\alpha-1}\left(x_2^*\right)^{\beta-1} > 0
\end{aligned}$$

Η **έμμεση συνάρτηση χρησιμότητας** δίνεται από

$$U\left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(x_1^*\right)^a\left(x_2^*\right)^\beta$$

$$= U^*\left(a, \beta, M, p_1, p_2\right)$$

$$= \left(\frac{a}{a+\beta}\frac{M}{p_1}\right)^a\left(\frac{\beta}{a+\beta}\frac{M}{p_2}\right)^\beta$$

$$= \frac{a^a\beta^\beta}{\left(a+\beta\right)^{a+\beta}}\frac{M^{a+\beta}}{p_1^a p_2^\beta}$$

- Πως μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί η παράμετρος a, δηλαδή το μερίδιο του πρώτου αγαθού στη συνάρτηση χρησιμότητας (υπονοεί μεταβολή προτιμήσεων ως προς το x_1); Λογικά, «απλώς» θα παραγωγίζαμε την (είναι δύσκολο...) $\dfrac{\partial U^*}{\partial a} = ...$

Γρήγορα καθίσταται εμφανές ότι αλγεβρικά είναι δύσκολο να υπολογίσουμε την αναλυτική έκφραση της μερικής παραγώγου $\dfrac{\partial U^*}{\partial a}$.

Η απάντηση μπορεί να βρεθεί ευκολότερα με χρήση του θεωρήματος της περιβάλλουσας. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^*}{\partial a} &= \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \left.\frac{\partial\left(x_1^a x_2^\beta\right)}{\partial a}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} \\
&= \left. x_1^a \ln\left(x_1\right) x_2^\beta\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \left(x_1^*\right)^a\left(x_2^*\right)^\beta \ln\left(x_1^*\right)
\end{aligned}$$

- **Το θεώρημα της περιβάλλουσας παράγει και ένα ακόμα εύχρηστο αποτέλεσμα με οικονομική ερμηνεία.** Έστω ότι μεταβάλλεται (κατόπιν ορθολογικής λύσης του προβλήματος ζήτησης) η παράμετρος του περιορισμού M. Δηλαδή έστω ότι το εισόδημα M αυξάνεται ή μειώνεται. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα της περιβάλλουσας

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} = \lambda^*$$

Δηλαδή ο **πολ/στής Lagrange στο στάσιμο σημείο** λ^* υποδηλώνει τη **σκιώδη τιμή του εισοδήματος** ή αλλιώς την **οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος** στο βέλτιστο αφού μας δείχνει πόσο μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί το εισόδημα.

Σημείωση: Σε όλα τα προβλήματα που θα συναντήσετε $\lambda^* > 0$. Όμως σε προχωρημένα προβλήματα οικονομικών μαθηματικών με παραπάνω από έναν περιορισμούς **ανισότητας,** δύναται το $\lambda^* = 0$, π.χ. $p_1x_1 + p_2x_2 \leq M$ άρα δεν «αναγκάζουμε» το άτομο να δαπανήσει όλο του το εισόδημα. Σε αυτή την περίπτωση $\lambda^* = 0$, όταν ο περιορισμός δεν ικανοποιείται με ισότητα στο βέλτιστο σημείο, μία μικρή μεταβολή του εισοδήματος δεν μεταβάλλει την έμμεση χρησιμότητα.

- Τέλος μία χρήσιμη ταυτότητα με την ονομασία **ταυτότητα Roy (Roy's identity)** προκύπτει από το θεώρημα περιβάλλουσας σε προβλήματα μεγιστοποίησης χρησιμότητας. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} = -\lambda^* x_i^*$$

Άρα με δεδομένη τη θετική οριακή χρησιμότητα του εισοδήματος $\lambda^* > 0$, μία μεταβολή στη τιμή του αγαθού μειώνει την έμμεση χρησιμότητα αναλογικά με το ύψος της ζήτησης.

2.4 Παράδειγμα με θεώρημα περιβάλλουσας

Ας δούμε ένα παράδειγμα με ελαχιστοποίηση δαπάνης για δεδομένο επίπεδο χρησιμότητας $\bar{U}$. Έστω το δεδομένο επίπεδο χρησιμότητας (από μία συνάρτηση χρησιμότητας Cobb-Douglas)

$$\bar{U} = x_1^a x_2^\beta$$

και η συνάρτηση δαπάνης

$$E = p_1x_1 + p_2x_2$$

την οποία **θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε** κρατώντας τη χρησιμότητα σταθερή στο επίπεδο $\bar{U}$.

Ο περιορισμός λαμβάνει τη μορφή

$$g^{(1)} - \bar{U} = 0$$

ή

$$x_1^a x_2^\beta = \bar{U}$$

και είναι μη-γραμμικός στη συγκεκριμένη άσκηση.

Έχουμε και πάλι στη διάθεσή μας (μέσω του προβλήματος) το διάνυσμα παραμέτρων

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \bar{U} & p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση Lagrange δίνεται από

$$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda \left[\bar{U} - x_1^a x_2^\beta \right]$$

με το στάσιμο σημείο να ικανοποιεί τις τρεις παρακάτω εξισώσεις (**Σ.Π.Τ**)

$$\begin{aligned}
(1) &\quad : \quad \mathcal{L}_1 = p_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^\beta = 0 \\
(2) &\quad : \quad \mathcal{L}_2 = p_2 - \lambda \beta x_1^a x_2^{\beta-1} = 0 \\
(3) &\quad : \quad \mathcal{L}_\lambda = \bar{U} - x_1^a x_2^\beta = 0
\end{aligned}$$

Διαιρώντας (1)/(2) έχουμε

$$\frac{\lambda a x_1^{a-1} x_2^\beta}{\lambda \beta x_1^a x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{\beta}{a} \frac{p_1}{p_2} x_1$$

οπότε με αντικατάσταση της $x_2 = \frac{\beta}{a} \frac{p_1}{p_2} x_1$ στην εξίσωση (3) λαμβάνουμε

$$\bar{U} - x_1^a \left(\frac{\beta}{a} \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)^\beta = 0 \Rightarrow$$

$$x_1^* = \bar{U}^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{a}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

και

$$x_2^* = \bar{U}^{\frac{1}{a+\beta}} \left(\frac{\beta}{a} \right)^{\frac{a}{a+\beta}} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{a}{a+\beta}}$$

Οι συναρτήσεις ζήτησης

$$x_i^* = h_i^* \left(a, \beta, \bar{U}, p_1, p_2 \right)$$

καλούνται και **ζητήσεις Hicks ή αποζημιωμένες ζητήσεις (Hicksian ή compensated demand function).**

Παρατηρήστε τη συμμετρία! (και πάλι) στη ζήτηση η οποία εξαρτάται από παραμέτρους **προτιμήσεων** a, β, **το επίπεδο χρησιμότητας** $\bar{U}$ **και τις τιμές** p_1, p_2.

Ως αλγεβρική άσκηση υπολογίστε την τιμή λ^* του πολ/στή Lagrange στο στάσιμο σημείο,

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \ldots = \\
&= \ldots = \\
&= \left(\bar{U}^{\frac{1-a-\beta}{\alpha+\beta}} \right) \left(a^{-\frac{a}{a+\beta}} \right) \left(\beta^{-\frac{\beta}{a+\beta}} \right) \left(p_1^{\frac{a}{a+\beta}} \right) \left(p_2^{\frac{\beta}{a+\beta}} \right)
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση αξίας έχει ελάχιστη τιμή που δίνεται από

$$E^* = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$$

ή συμβολικά

$$E^* = E^* \left(\bar{U}, \alpha, \beta, p_1, p_2\right)$$

όπου διαφαίνεται η εξάρτηση της συνάρτησης αξίας από τις εξωγενώς δοσμένες τιμές για τις παραμέτρους του προβλήματος: $\bar{U}, \alpha, \beta, p_1, p_2$.

- Σύμφωνα με το θεώρημα της περιβάλλουσας

  $$\frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{U}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \lambda^*$$

  άρα **στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης δαπάνης, η τιμή του πολ/στή Lagrange λ^* εκφράζει οριακό κόστος χρησιμότητας**. Αν αυξηθεί το ζητούμενο επίπεδο χρησιμότητας $\bar{U}$ τότε θα πρέπει να αυξηθεί η δαπάνη κατά λ^*.

- Μία άλλη εφαρμογή του θεωρήματος της περιβάλλουσας είναι το **λήμμα Shephard (Shephard's lemma)**

  $$\frac{\partial E^*}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = h_i^* \left(a, \beta, \bar{U}, p_1, p_2\right)$$

  από όπου προκύπτει και ο τίτλος **«αποζημιωμένη ζήτηση»**

Παρατηρήστε ότι αν μεταβληθεί η τιμή του i αγαθού τότε για να διατηρήσουμε το ίδιο επίπεδο διαβίωσης $\bar{U}$ θα πρέπει ο καταναλωτής να «αποζημιωθεί» με

$$\frac{\partial E^*}{\partial p_i} = h_i^* \left(a, \beta, \bar{U}, p_1, p_2\right)$$

επιπλέον εισόδημα.

Slutsky equation

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = \underbrace{\frac{\partial h_j^*}{\partial p_k}}_{\text{αποτέλεσμα υποκατάστασης}} - \underbrace{\frac{\partial x_j^*}{\partial M} x_k^*}_{\text{αποτέλεσμα εισοδήματος}}$$