Περίγραμμα διάλεξης 7

1 Βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων

Έστω ότι έχουμε μία πολυμεταβλητή συνάρτηση του τύπου

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και η συνάρτηση $f(\cdot, \cdot, ...)$ είναι **τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη**.

Θα δούμε τις ιδιότητες της **κοιλότητας** και **κυρτότητας** ως **εναλλακτικές προσεγγίσεις των Σ.Δ.Τ** για βελτιστοποίηση. Αν η αντικειμενική συνάρτηση που βελτιστοποιούμε είναι (αυστηρώς) κοίλη τότε το στάσιμο σημείο(α) των Σ.Π.Τ αντιστοιχεί σε (μοναδικό) ολικό μέγιστο και αντίστοιχα σε ελάχιστο για κυρτές συναρτήσεις.

1.1 Κοίλες (concave) και κυρτές (convex) συναρτήσεις

Ορισμός χωρίς τη χρήση παραγώγων

Για σημεία $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ με $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ στο πεδίο ορισμού της $f(\mathbf{x})$ και $0 < \theta < 1$

$$\underbrace{f(\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v})}_{\text{ύψος τόξου}} \geq \underbrace{\theta f(\mathbf{u}) + (1-\theta) f(\mathbf{v})}_{\text{ύψος γραμμής}} \quad : \quad \textbf{κοίλη (concave)}$$

$$\underbrace{f(\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v})}_{\text{ύψος τόξου}} \leq \underbrace{\theta f(\mathbf{u}) + (1-\theta) f(\mathbf{v})}_{\text{ύψος γραμμής}} \quad : \quad \textbf{κυρτή (convex)}$$

Αυστηρή ανισότητα ($<$) ή ($>$) συνεπάγεται και **αυστηρή κοιλότητα ή αυστηρή κυρτότητα** (**strictly concave** ή **strictly convex**) της συνάρτησης

Σημειώστε ότι:

- Μέχρι τώρα ουσιαστικά μελετήσαμε τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) (μέσω των Σ.Δ.Τ) στο στάσιμο σημείο $y^*, x_1^*, ..., x_n^*$ που προκύπτει από την επίλυση των Σ.Π.Τ.
- Αν η **αντικειμενική συνάρτηση** f είναι κοίλη (κυρτή) τότε το x^* είναι **ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο)**.
- Αν η συνάρτηση f είναι αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή) τότε το x^* είναι **μοναδικό ολικό μέγιστο (είναι μοναδικό ολικό ελάχιστο)**

Χρήσιμες Ιδιότητες

1. Μία γραμμική συνάρτηση, π.χ. η $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, μπορεί να θεωρηθεί **τόσο** κοίλη **όσο** και κυρτή
2. Αν $f(x)$ είναι **κοίλη (κυρτή)** τότε η $-f(x)$ είναι **κυρτή (κοίλη)**
3. Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι και οι δύο **κοίλες (κυρτές)** τότε η $f(x) + g(x)$ είναι **κοίλη (κυρτή)**
4. Επιπλέον αν μία εκ των δύο είναι **αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή)** τότε η $f(x) + g(x)$ είναι **αυστηρώς κοίλη (αυστηρώς κυρτή)**

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση κέρδους (με συνάρτηση παραγωγής τύπου **Cobb-Douglas**) ως προς τις μεταβλητές των εισροών κεφάλαιο K και εργασία L,

$$\begin{aligned} \Pi(K, L) &= TR(K, L) - TC(K, L) \\ &= pQ(K, L) - TC(K, L) \\ &= pAK^a L^\beta - (wL + rK) \\ &= pAK^a L^\beta - wL - rK \end{aligned}$$

Αντί να ελέγξουμε αν η συνάρτηση κέρδους $\Pi(K, L)$ είναι κοίλη ή αυστηρώς κοίλη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ιδιότητες κοιλότητας - κυρτότητας ελέγχοντας μόνο τη συνάρτηση παραγωγής

$$Q(K, L) = AK^a L^\beta$$

αφού η γραμμική συνάρτηση κόστους

$$TC(K, L) = wL + rK$$

μπορεί να θεωρηθεί **είτε κοίλη είτε κυρτή** (τη θεωρούμε **κοίλη**) ενώ η συνάρτηση παραγωγής **Cobb-Douglas** θα δούμε ότι κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις είναι **είτε αυστηρώς κοίλη, είτε απλώς κοίλη.**

Άρα **η συνάρτηση κέρδους** κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις για την συνάρτηση παραγωγής και γραμμική συνάρτηση κόστους και επειδή έχουμε θετικές παραμέτρους $p, A > 0$, **είναι**

- είτε αυστηρώς κοίλη (και έχει **μοναδικό ολικό** μέγιστο **στο στάσιμο σημείο**)
- είτε κοίλη (και έχει **ολικό** μέγιστο **στο ή στα στάσιμα σημεία**)

Ασκήσεις

Απόδειξη κοιλότητας/κυρτότητας χωρίς τη χρήση παραγώγων[1]

Ελέγξτε αν οι συναρτήσεις

$$y = f(x) \text{ με } f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$y = f(\mathbf{x}) \text{ με } f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

είναι κοίλες (αυστηρώς ή όχι), κυρτές (αυστηρώς ή όχι) ή τίποτα από αυτά.

Περίγραμμα απάντησης.

- Για τη συνάρτηση **μίας μεταβλητής** $f(x) = x^2$ έχουμε (για $0 < \theta < 1$ και $u_1 \neq v_1 \in \mathbb{R}$) μετά από αφαίρεση του δεξιού μέρους της ανισότητας από το αριστερό μέρος:

$$\begin{aligned}
& f[\theta u_1 + (1-\theta) v_1] - \theta f(u_1) - (1-\theta) f(v_1) \\
= & [\theta u_1 + (1-\theta) v_1]^2 - \theta u_1^2 - (1-\theta) v_1^2 \\
= & \theta^2 u_1^2 + (1-\theta)^2 v_1^2 + 2\theta(1-\theta) u_1 v_1 - \theta u_1^2 - (1-\theta) v_1^2 \\
= & -u_1^2 \theta (1-\theta) - v_1^2 \theta (1-\theta) + 2\theta (1-\theta) u_1 v_1 \\
= & -\left[u_1^2 \theta (1-\theta) + v_1^2 \theta (1-\theta) - 2\theta (1-\theta) u_1 v_1\right] \\
= & -\theta (1-\theta) \left[u_1^2 + v_1^2 - 2u_1 v_1\right] \\
= & -\underbrace{\theta}_{0<\theta<1 \Rightarrow (+)} \cdot \underbrace{(1-\theta)}_{0<\theta<1 \Rightarrow (+)} \cdot \underbrace{(u_1 - v_1)^2}_{(+)} < 0
\end{aligned}$$

  Άρα η $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ είναι **αυστηρώς κυρτή**.

- Για την **πολυμεταβλητή** συνάρτηση

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

  έχουμε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ αφού $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}) &= u_1^2 + 2u_2^2 \\
f(\mathbf{v}) &= v_1^2 + 2v_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\theta\mathbf{u} + (1-\theta)\mathbf{v}) &= f\left[\underbrace{\theta u_1 + (1-\theta)\mathbf{v}_1}_{x_1}, \underbrace{\theta u_2 + (1-\theta)\mathbf{v}_2}_{x_2}\right] \\
&= (\theta u_1 + (1-\theta) 2v_1)^2 + 2(\theta u_2 + (1-\theta) v_2)^2
\end{aligned}$$

[1]Μόνο για μαθηματικούς, ... (που σημαίνει εκτός εξεταστέας ύλης).

Προσοχή είτε $u_1 \neq v_1$ είτε $u_2 \neq v_2$ είτε και τα δύο. Άρα ελέγχουμε αν

$$f\left(\theta\mathbf{u}+(1-\theta)\mathbf{v}\right)-\theta f\left(\mathbf{u}\right)-(1-\theta)f\left(\mathbf{v}\right)$$

είναι μη-αρνητικό ή μη-θετικό.

Σημείωση: Βέβαια για τη μονομεταβλητή συνάρτηση $f(x)=x^2$ είδαμε ότι είναι αυστηρώς κυρτή άρα το άθροισμα δύο αυστηρώς κυρτών συναρτήσεων δίνει επίσης αυστηρώς κυρτή συνάρτηση!!!

2 Έλεγχος κοιλότητας-κυρτότητας μέσω της Εσσιανής μήτρας

2.1 Συναρτήσεις που υποθέτουμε ότι έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους

- Έστω $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Έστω ότι H η **Εσσιανή μήτρα δεύτερων μερικών παραγώγων** της συνάρτησης $f(x_1,x_2,...,x_n)$
- Η κοιλότητα (αυστηρή ή όχι) και η κυρτότητα της συνάρτησης $f(x_1,x_2,...,x_n)$ θα χαρακτηρίζεται χρησιμοποιώντας κάποιες ιδιότητες της **Εσσιανής** μήτρας
- Για την ώρα θα συμβολίσουμε με A την Εσσιανή καθώς οι παρακάτω χαρακτηρισμοί ισχύουν για οποιαδήποτε μήτρα A πληρεί συγκεκριμένες ιδιότητες
- Σημειώστε ότι η Εσσιανή μήτρα είναι συμμετρική όπως προκύπτει από το **θεώρημα Young** τουλάχιστον για συνεχείς και δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Οι παρακάτω δύο έννοιες είναι σημαντικές για το χαρακτηρισμό της κοιλότητας ή κυρτότητας μίας συνάρτησης

- Μία **κύρια ελάσσονα** μήτρα k τάξεως (principal minor) της $n \times n$ μήτρας A, λαμβάνεται όταν διαγράψουμε **τις ίδιες** $n-k$ **γραμμές και στήλες** της μήτρας A για $n-k=0,1,...,n-1$ (άρα $k=1,...,n$). Οι κύριες ελάσσονες μήτρες θα συμβολίζονται με D_k.
- Μία **πρώτιστη κύρια ελάσσονα** της A τάξεως k (leading principal minor) είναι η κύρια ελάσσονα k τάξεως που προκύπτει από τη διαγραφή των $n-k$ **τελευταίων** γραμμών και στηλών της μήτρας για $k=1,...,n$. Τις πρώτιστες κύριες ελάσσονες θα τις συμβολίζουμε με A_k (θυμηθείτε ότι οι πρώτιστες κύριες ελάσσονες χρησιμοποιήθηκαν στο χαρακτηρισμό **τοπικών** βέλτιστων σημείων).

Ιδιότητες

- Υπάρχουν 2^n-1 **κύριες ελάσσονες** όταν η τετραγωνική μήτρα A είναι $n \times n$
- Υπάρχουν n **πρώτιστες κύριες ελάσσονες** όταν η τετραγωνική μήτρα A είναι $n \times n$

Παράδειγμα

Μήτρα 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

· Υπάρχουν $2^2 - 1 = 3$ **κύριες ελάσσονες**

- **Μία** (η D_2) διαγράφοντας $n - k = 2 - 2 = 0$ γραμμές/στήλες και
- **δύο** κύριες ελάσσονες (D_1) διαγράφοντας 1 γραμμή/στήλη

Αναλυτικά οι **κύριες ελάσσονες ορίζουσες είναι**

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|D_1| = a_{11} \quad , \quad |D_1| = a_{22}$$

· Υπάρχουν 2 **πρώτιστες κύριες ελάσσονες μήτρες**, η

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad (= A)$$

και η

$$A_1 = (a_{11})$$

Μήτρα 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Υπάρχουν $2^3 - 1 = 7$ **κύριες ελάσσονες ορίζουσες** διαγράφοντας 0 γραμμές/στήλες ($k = 3$) , 1 γραμμή/στήλη ($k = 2$), 2 γραμμές και στήλες ($k = 1$) όπου

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|D_1| = a_{33} \quad , \quad |D_1| = a_{22} \quad , \quad |D_1| = a_{11}$$

Υπάρχουν 3 **πρώτιστες κύριες ελάσσονες μήτρες**, η

$$A_1 = (a_{11})$$

η

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

και η

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Μήτρα 4×4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Υπάρχουν $2^4 - 1 = 15$ **κύριες ελάσσονες μήτρες**

- Μία, η D_4, διαγράφοντας 0 γραμμές/στήλες ($k = 4$)
- Τέσσερεις D_3 διαγράφοντας 1 γραμμή/στήλη ($k = 3$), τις γραμμές/στήλες $(1), (2), (3), (4)$
- Έξι D_2 διαγράφοντας 2 γραμμές και στήλες ($k = 2$), τις γραμμές/στήλες $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$
- Τέσσερεις D_1 διαγράφοντας 3 γραμμές και στήλες ($k = 1$), τις γραμμές/στήλες $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$

Αναλυτικά, οι **ορίζουσες** δίνονται από

$$|D_4| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad , \quad |D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \quad , \quad |D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \ , \ |D_2| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \ , \ |D_2| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} \ , \ |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \ , \ |D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|D_1| = a_{44} \ , \ |D_1| = a_{33} \ , \ |D_1| = a_{22} \ , \ |D_1| = a_{11}$$

Υπάρχουν 4 **πρώτιστες κύριες ελάσσονες μήτρες**, οι

$$A_1 = (a_{11}) \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Θ.Η.Ο και Α.Η.Ο τετραγωνικές μήτρες, κυρτότητα και κοιλότητα

- Μία συμμετρική μήτρα A είναι θετικά ημι-ορισμένη (Θ.Η.Ο) όταν όλες οι $2^n - 1$ **κύριες ελάσσονες ορίζουσες** είναι μη-αρνητικές ≥ 0 , δηλαδή $|D_k| \geq 0$ ($\forall \mathbf{x}$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης). Αν η Εσσιανή μήτρα της $f(x_1, ..., x_n)$ είναι Θ.Η.Ο τότε η $f(x_1, ..., x_n)$ είναι κυρτή. **Στην περίπτωση αυτή οποιοδήποτε στάσιμο σημείο $x_1^*, ..., x_n^*$ και y^* είναι ολικό ελάχιστο.**
- Μία συμμετρική μήτρα A είναι αρνητικά ημι-ορισμένη (Α.Η.Ο) όταν όλες οι $2^n - 1$ **κύριες ελάσσονες ορίζουσες** ($\forall \mathbf{x}$ στο πεδίο ορισμού της συναρτησης) εναλλάσονται πρόσημο ως εξής $(-1)^k |D_k| \leq 0$. Αν η Εσσιανή μήτρα της $f(x_1, ..., x_n)$ είναι Α.Η.Ο τότε η $f(x_1, ..., x_n)$ είναι κοίλη. **Στην περίπτωση αυτή οποιοδήποτε στάσιμο σημείο $x_1^*, ..., x_n^*$ και y^* είναι ολικό μέγιστο.**

2.2 Θ.Ο και Α.Ο τετραγωνικές μήτρες, αυστηρή κυρτότητα και αυστηρή κοιλότητα

- Μία συμμετρική μήτρα A είναι θετικά ορισμένη (Θ.Ο) όταν όλες οι **πρώτιστες κύριες ελάσσονες (leading principal minors) ορίζουσες** της A τάξεως

k ($\forall \mathbf{x}$ στο πεδίο ορισμού της συναρτησης) είναι θετικές > 0, δηλαδή

$$|A_k| > 0 \quad , \quad \forall k = 1, ..., n$$

Αν η Εσσιανή μήτρα της $f(x_1, ..., x_n)$ είναι Θ.Ο τότε η $f(x_1, ..., x_n)$ είναι **αυστηρώς κυρτή (ή γνησίως κυρτή). Στην περίπτωση αυτή το στάσιμο σημείο $x_1^*, ..., x_n^*$ και y^* είναι μοναδικό και ολικό ελάχιστο.**

- Μία συμμετρική μήτρα A είναι αρνητικά ορισμένη (Α.Ο) όταν όλες οι **πρώτιστες κύριες ελάσσονες (leading principal minors) ορίζουσες** της A τάξεως k ($\forall \mathbf{x}$ στο πεδίο ορισμού της συναρτησης) εναλλάσονται πρόσημο ως εξής

$$(-1)^k |A_k| > 0 \quad , \quad \forall k = 1, ..., n$$

Αν η Εσσιανή μήτρα της $f(x_1, ..., x_n)$ είναι Α.Ο τότε η $f(x_1, ..., x_n)$ είναι **αυστηρώς κοίλη**. **Στην περίπτωση αυτή το στάσιμο σημείο $x_1^*, ..., x_n^*$ και y^* είναι μοναδικό και ολικό μέγιστο.**

3 Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = AK^a L^\beta$$

με **θετικές** παραμέτρους $a, \beta > 0$ και $A > 0$ ενώ οι μεταβλητές $K, L > 0$.

Η συγκεκριμένη συνάρτηση υιοθετείται από την οικονομική βιβλιογραφία **και** στο ρόλο της συνάρτησης χρησιμότητας

$$u = U(x, y) = Ax^a y^\beta$$

στο πλαίσιο προβλημάτων μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή (καταναλωτών ή του "αντιπροσωπευτικού καταναλωτή").

Επιστρέφοντας στη συνάρτηση παραγωγής, για ποιές τιμές των παραμέτρων a, β είναι η Εσσιανή μήτρα της συνάρτησης **Cobb-Douglas**

$$H = \begin{pmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} \\ Q_{LK} & Q_{LL} \end{pmatrix}$$

αρνητικά ορισμένη και αρνητικά ημι-ορισμένη;

Η απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα θα βοηθήσει στη γρηγορότερη εξαγωγή συμπεράσματος σχετικά με το αν το μέγιστο της συνάρτησης κέρδους είναι ολικό και/ή ολικό και μοναδικό.

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης παραγωγής δίνονται από

$$\begin{aligned} Q_{KK} &= a(a-1) AK^{a-2} L^\beta \\ Q_{LL} &= \beta(\beta-1) AK^a L^{\beta-2} \\ Q_{LK} &= \alpha\beta AK^{a-1} L^{\beta-1} \end{aligned}$$

Η Εσσιανή μήτρα H είναι αρνητικά ορισμένη όταν οι πρώτιστες κύριες ελάσσονες έχουν πρόσημα

$$|H_1| = Q_{KK} < 0 \;\; ή \;\; |H_1| = Q_{LL} < 0$$

και

$$|H_2| = \begin{vmatrix} Q_{KK} & Q_{KL} \\ Q_{LK} & Q_{LL} \end{vmatrix} = Q_{KK}Q_{LL} - (Q_{KL})^2 > 0$$

Δηλαδή, ως προς τις παραμέτρους a, β θέλουμε (για **αυστηρή κοιλότητα**)

$$\begin{aligned} |H_1| &= Q_{KK} = a(a-1)AK^{a-2}L^{\beta} < 0 \Rightarrow a < 1 \\ & ή \\ |H_1| &= Q_{LL} = \beta(\beta-1)AK^{a}L^{\beta-2} < 0 \Rightarrow \beta < 1 \end{aligned}$$

και

$$|H_2| = a\beta(a-1)(\beta-1)A^2K^{2a-2}L^{2\beta-2} - \left(\alpha\beta AK^{a-1}L^{\beta-1}\right)^2 > 0 \Rightarrow$$

$$a\beta(a-1)(\beta-1)A^2K^{2a-2}L^{2\beta-2} - \alpha^2\beta^2A^2K^{2a-2}L^{2\beta-2} > 0 \Rightarrow$$

$$\left[a\beta(a-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right]A^2K^{2a-2}L^{2\beta-2} > 0 \Rightarrow$$

$$a\beta(a-1)(\beta-1) - \alpha^2\beta^2 > 0 \Rightarrow$$

$$a\beta(a-1)(\beta-1) > \alpha^2\beta^2 \Rightarrow$$

$$(a-1)(\beta-1) > \alpha\beta \Rightarrow$$

$$\alpha\beta - a - \beta + 1 > \alpha\beta \Rightarrow$$

$$-a - \beta + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$a + \beta < 1$$

Άρα, συνολικά και για τις δύο παραμέτρους, **η συνάρτηση Cobb-Douglas είναι αυστηρώς κοίλη** όταν

$$0 < a, \beta < 1$$

και

$$a + \beta < 1$$

Η Εσσιανή μήτρα H είναι Αρνητικά ημι-ορισμένη όταν οι κύριες ελάσσονες

$$|H_1| = Q_{KK} \leq 0 \;\; , \;\; |H_1| = Q_{LL} \leq 0$$

και

$$|H_2| = \begin{vmatrix} Q_{KK} & Q_{LK} \\ Q_{KL} & Q_{LL} \end{vmatrix} = Q_{KK}Q_{LL} - (Q_{KL})^2 \geq 0$$

δηλαδή όταν οι παράμετροι a, β ικανοποιούν τις ανισότητες

$$0 \leq a, \beta \leq 1$$

και

$$a + \beta \leq 1$$

Άρα, συνολικά και για τις δύο παραμέτρους, **η συνάρτηση Cobb-Douglas είναι κοίλη** όταν

$$0 \leq a, \beta \leq 1$$
και
$$a + \beta \leq 1$$