Σύνολο ασκήσεων 6

Άσκηση 1

Βρείτε τα στάσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων (από Hoy et al., 2001[1])

$$y = 2x_1^2 + x_2^2$$

$$y = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$$
$$y = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1^3$$
$$y = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$$
$$y = x_1^2 - x_2^2$$

Υπόδειξη: μπορείτε να σχεδιάσετε (τρισδιάστατα) τις παραπάνω συναρτήσεις στο geogebra; **Βλ. Παράρτημα στο τέλος των ασκήσεων.**

Βασική ανάλυση

Πλήρης Ανταγωνισμός και μονοπώλιο

Έστω ότι η αγορά είναι πλήρως ανταγωνιστική με τιμή p, δεδομένη για όλες τις επιχειρήσεις (η ελαστικότητα ζήτησης είναι $-\infty$). Η αντιπροσωπευτική επιχείρηση καλείται να βελτιστοποιήσει $\max_q \Pi(q)$ ως προς τη συνάρτηση κέρδους

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = pq - C(q)$$

Σ.Π.Τ

$$\Pi_q = MR - MC = 0 \Rightarrow MR(q^*) = MC(q^*) \Rightarrow p = MC(q^*)$$

Σ.Δ.Τ

$$\begin{aligned} \Pi_{qq}(q^*) &= MR'(q^*) - MC'(q^*) < 0 \Rightarrow MR'(q^*) < MC'(q^*) \\ &\Rightarrow \\ -MC'(q^*) &< 0 \Rightarrow C_{qq}(q^*) > 0 \end{aligned}$$

Ένα μονοπώλιο είναι ο μοναδικός προμηθευτής σε μία συγκεκριμένη αγορά. Το κρίσιμο χαρακτηριστικό της μονοπωλιακής συμπεριφοράς είναι το γεγονός ότι ο μονοπωλητής καθορίζει τη τιμή p, ή τη ποσότητα q. Τα μονοπώλια προκύπτουν είτε (α) με αποκλειστικό έλεγχο επί των φυσικών πόρων είτε (β) μέσω αποκλειστικών νομικών δικαιωμάτων, π.χ. επιχειρήσεις κοινής ωφέλειας, φαρμακευτικές εταιρείες με τα διπλώματα ευρεσιτεχνίας, κ.ά.

[1] Hoy Michael, Livernois John, McKenna Chris, Rees Ray, Stengos Thanasis, (2001). Mathematics for Economicsts, Second Edition, The MIT Press, σελ. 549

Η ζήτηση για το προϊόν της εταιρείας δίνεται από την $q = D(p)$ και αν αντιστρέψουμε λαμβάνουμε την αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης $p = D^{-1}(q) = F(q)$.

Παρατηρήστε ότι για την ελαστικότητα ζήτησης ισχύει

$$\epsilon = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = D'\frac{p}{q} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\epsilon} = F'\frac{q}{p}$$

ενώ το οριακό έσοδο

$$MR(q) = \frac{dR}{dq} = \frac{d(pq)}{dq} = \frac{d(F(q)q)}{dq}$$

δίνεται ως συνάρτηση της ελαστικότητας

$$\begin{aligned} MR(q) &= F'q + F = F'q + p \Rightarrow \\ MR(q) &= \left(\frac{F'q}{p} + 1\right)p = \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)p \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κέρδους του μονοπωλητή δίνεται από

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = pq - C(q) = D^{-1}(q)q - C(q) = F(q)q - C(q)$$

με **Σ.Π.Τ**

$$\Pi_q = MR - MC = 0 \Rightarrow F'q + F - MC = 0 \Rightarrow$$
$$MR(q^*) = MC(q^*)$$

και **Σ.Δ.Τ**

$$\Pi_{qq}(q^*) = MR'(q^*) - MC'(q^*) < 0 \Rightarrow MR'(q^*) < MC'(q^*)$$

Από την Σ.Π.Τ βλέπουμε ότι και πάλι το πρόβλημα βελτιστοποίησης υπονοεί ισότητα οριακού εσόδου με το οριακό κόστος όμως τώρα το οριακό έσοδο δεν είναι ίσο με τη τιμή αλλά δίνεται ως συνάρτηση της ελαστικότητας ζήτησης

$$\begin{aligned} MR(q^*) &= F'q^* + F(q^*) = F'q^* + p \Rightarrow \\ MR(q^*) &= \left(\frac{F'q^*}{p} + 1\right)p = \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)p \end{aligned}$$

Όταν η ελαστικότητα τείνει στο $-\infty$ (και παρομοιάζει την τέλεια ελαστικότητα της ανταγωνιστικής αγοράς) τότε $MR(q^*) \to p$. Όταν η ελαστικότητα τείνει προς το -1 το οριακό έσοδο τείνει στο μηδέν ενώ στην περίπτωση ανελαστικής αγοράς το οριακό έσοδο γίνεται αρνητικό! σύμφωνα με τη συνθήκη βελτιστοποίησης (Σ.Π.Τ). Απόρροια της άσκησης είναι ότι ο μονοπωλητής δε λειτουργεί σε ανελαστικές αγορές.

Παράδειγμα. Ζήτηση $q = Ap^{-\gamma}$ και γραμμικό κόστος $C(q) = bq$. Έχουμε $p = A^{1/\gamma}q^{-1/\gamma} = aq^{\frac{1}{\epsilon}}$ και $\epsilon = -\gamma$.

$$\Pi(q) = aq^{\frac{1}{\epsilon}}q - bq = aq^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} - bq$$
$$\Pi_q = \frac{(1+\epsilon)a}{\epsilon}q^{\frac{1}{\epsilon}} - b = 0 \Rightarrow q^* = \left[\frac{b\epsilon}{(1+\epsilon)a}\right]^{\epsilon}$$
$$\Pi_{qq}(q^*) = \frac{(1+\epsilon)a}{\epsilon^2}(q^*)^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} < 0$$

όταν $\epsilon < -1$.

Άσκηση 2

(Άσκηση από Hoy et al., 2001, σελ 551). Ένα μονοπώλιο παράγει **δύο** προϊόντα q_1, q_2 με **γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης**

$$\begin{aligned} q_1 &= 100 - 2p_1 + p_2 \\ q_2 &= 120 + 3p_1 - 5p_2 \end{aligned}$$

Η **συνάρτηση κόστους** της επιχείρησης δίνεται από

$$TC\left(q_1, q_2\right) = 50 + 10q_1 + 20q_2$$

Η **συνάρτηση εσόδων** TR δίνεται από το άθροισμα των εσόδων από κάθε προϊόν

$$TR = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

Προβείτε στη βελτιστοποίηση

$$\max_{q_1, q_2} \Pi(q_1, q_2)$$

όπου $\Pi(q_1, q_2)$ η συνάρτηση κέρδους του μονοπωλίου.

Άσκηση 3

(Άσκηση από Hoy et al., 2001, σελ 553). **Διαχωρισμός τιμών μονοπωλίου.**

Ένα μονοπώλιο ‘‘διαιρεί’’ την αγορά του προϊόντος που παράγει σε δύο διαφορετικές αγορές (π.χ σε δύο διαφορετικές πόλεις) με **αντίστροφες συναρτήσεις ζήτησης**

$$\begin{aligned} p_1 &= 100 - q_1 \\ p_2 &= 120 - 2q_2 \end{aligned}$$

Το προϊόν παράγεται από ένα μόνο εργοστάσιο, $q = q_1 + q_2$, με συνάρτηση κόστους

$$\begin{aligned} C &= 20q \\ &= 20\left(q_1 + q_2\right) \end{aligned}$$

Προβείτε στη βελτιστοποίηση

$$\max_{q_1, q_2} \Pi(q_1, q_2)$$

Δείξτε και μετά επιβεβαιώστε το αναλυτικά, με βάση την παραπάνω άσκηση, ότι η υψηλότερη τιμή ‘‘χρεώνεται’’ στην αγορά με τη χαμηλότερη ελαστικότητα ζήτησης.

Σημειώσεις (εν τάχει)

... ensi vuonna ...

Άσκηση 4

Βασίζεται στο βιβλίο Gibbons Robert, 1992, A primer in game theory, Published by Harvester Wheatsheaf, σελ. 14-22 και 61-62.

Δυοπώλιο.

Υποθέστε δύο επιχειρήσεις που πωλούν ένα **πανομοιότυπο** (το ίδιο δηλαδή) αγαθό. Υποθέστε ότι η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης (άρα και η συνάρτηση ζήτησης) είναι γραμμική συνάρτηση της ποσότητας του αγαθού

$$p = a - bq = a - b\left(q_1 + q_2\right)$$

ενώ (...υποθέσεις απλοποίησης...) κάθε επιχείρηση έχει σταθερό και ίδιο οριακό κόστος c, π.χ. $C_1 = cq_1$ και $C_2 = cq_2$ με $c < a$.

Επειδή η τιμή εξαρτάται από το συνολικό προϊόν που διατίθεται, η απόφαση παραγωγής κάθε επιχείρησης εξαρτάται από την απόφαση παραγωγής της άλλης. Η λύση **Cournot**[2] του ''παίγνιου'' (απλούστερη περίπτωση πλήρους πληροφόρησης και ορθολογικών αποφάσεων) συνίσταται στην **εύρεση της άριστης στρατηγικής δηλαδή επιλογής παραγωγής** q_i^* για κάθε επιχείρηση. Έτσι, κάθε παίκτης του ''παίγνιου'' (δηλαδή κάθε επιχείρηση) μεγιστοποιεί τη συνάρτηση κέρδους

$$\Pi_i = p\left(q_1, q_2\right) q_i - C_i$$

με τις Σ.Π.Τ εκφρασμένες ως $q_i = f(q_j)$ να ονομάζονται **συναρτήσεις άριστης απόκρισης** (best response functions).[3]

Βρείτε: την βέλτιστη **ποσότητα** παραγωγής q_i^* για κάθε επιχείρηση, την **τιμή** p^* που διαμορφώνεται στην αγορά καθώς και το **κέρδος** της και σχολιάστε λεπτομερώς την περίπτωση που υπάρχουν n επιχειρήσεις στην αγορά.

Τι συμβάινει με τα παραπάνω καθώς $n \to 1$ και $n \to +\infty$, δηλαδή σχολιάστε την τιμή και την ποσότητα παραγωγής (και τα κέρδη) σε κάθε περίπτωση (πλήρης ανταγωνισμός, μονοπώλιο, ολιγοπώλιο).

Απάντηση

Συνάρτηση κέρδους για την $i-$οστή επιχείρηση

$$\begin{aligned}\Pi_i &= p\left(q_i, q_j\right) q_i - C_i \\ &= aq_i - bq_i^2 - bq_jq_i - cq_i\end{aligned}$$

[2]Antoine Augustin Cournot, 1801-1877

[3]Αν η **παραγωγική ικανότητα (capacity)** και το προϊόν μπορούν να μεταβληθούν/προσαρμοστούν εύκολα, τότε το υπόδειγμα (δείτε παρακάτω) **Bertrand** είναι καλύτερο και οι **δυοπωλητές ανταγωνίζονται ως προς την τιμή του προϊόντος** (θεωρούμε ότι μπορούν να καλύψουν την ζήτηση για το επίπεδο τιμής που θέτουν) ενώ το υπόδειγμα δυοπωλίου Cournot εφαρμοζέται καλύτερα σε περιπτώσεις όπου προϊόν και παραγωγική ικανότητα είναι δύσκολο να ελεχθούν/προσαρμοστούν.

Σ.Π.Τ για κάθε επιχείρηση ξεχωριστά $i = 1, 2 = n$, συνάρτηση απόκρισης και παραγόμενη ποσότητα $q_i^* = q_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}}$ στο δυοπώλιο Cournot

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_i}{dq_i} &= a - 2bq_i - bq_j - c = 0 \Rightarrow \\ q_i &= f(q_j) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \end{aligned}$$

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right) \Rightarrow$$

$$q_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} = \frac{a-c}{3b} \quad , \quad q_j^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} = \frac{a-c}{3b}$$

Η παραπάνω λύση για την **ποσότητα** μπορεί να επιτευχθεί παρατηρώντας τη **συμμετρία** των δύο Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} \mathbf{q_1} &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\mathbf{q_2} \\ \mathbf{q_2} &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\mathbf{q_1} \end{aligned}$$

που υπονοεί

$$\mathbf{q}* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\mathbf{q}* \Rightarrow \mathbf{q}^* = \frac{a-c}{3b}$$

Τιμή $p^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}}$ στο δυοπώλιο Cournot

$$p^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} = a - b\left(q_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} + q_j^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}}\right) = a - \left(\frac{2a-2c}{3}\right) = \frac{a+2c}{3}$$

Σύγκριση $p^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}}$ με τιμή $p^{\Pi\Lambda} = MC = c$ **πλήρους ανταγωνισμού**

$$p^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} - p^{\Pi\Lambda} = \frac{a+2c}{3} - c = \frac{a-c}{3} > 0$$

Κέρδος στο δυοπώλιο Cournot

$$\Pi_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} = p^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} \cdot q_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} - c \cdot q_i^{\Delta\Upsilon\mathrm{O}} = \cdots = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

Περίπτωση n επιχειρήσεων.
Η **συνάρτηση κέρδους** διαμορφώνεται ως εξής,

$$\Pi_i = aq_i - bq_i^2 - b\underbrace{\sum_{j(j\neq i)}}_{n-1 \text{ όροι}} q_j q_i - cq_i$$

αφού η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης γενικεύεται στην $p = a - b\,(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$.

Σ.Π.Τ, συνάρτηση απόκρισης και **παραγόμενη ποσότητα** $q_i^{\text{ΟΛΙΓ}}$ στο **ολιγοπώλιο, συμμετρία:** κάθε επιχείρηση παράγει την ίδια ποσότητα $q_i = q^{*\text{ΟΛΙΓ}}$, άρα η λύση των Σ.Π.Τ δίνει

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_i}{dq_i} &= a - 2bq_i - b\sum_{j\neq i} q_j - c = 0 \Rightarrow \\ q_i &= f\left(\sum_{j\neq i} q_j\right) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} q_j\end{aligned}$$

$$q^{*\text{ΟΛΙΓ}} = f\left(\sum_{j\neq i} q_j\right) = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}(n-1)\,q^{*\text{ΟΛΙΓ}} \Rightarrow$$

$$q^{*\text{ΟΛΙΓ}} = \frac{a-c}{(n+1)\,b}$$

Τιμή $p^{*\text{ΟΛΙΓ}}$ στο ολιγοπώλιο

$$p^{*\text{ΟΛΙΓ}} = a - \frac{n\,(a-c)}{(n+1)} = \frac{a+nc}{n+1}$$

$$p^{\text{MON}} - p^{\text{ΔΥΟ}} = \frac{a+c}{2} - \frac{a+2c}{3} = \frac{a-c}{6} > 0$$

$$p^{\text{MON}} > p^{\text{ΔΥΟ}} > \cdots > p^{\text{ΠΛ}}$$

Κέρδος $\Pi_i^{\text{ΟΛΙΓ}} = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$

Γενικά, με $n = 1, 2, \ldots$ επιχειρήσεις:

$$\begin{array}{ccccc} q^{*\text{MON}} = \frac{a-c}{2b} & , & p^{*\text{MON}} = \frac{a+c}{2} & , & \Pi_i^{\text{MON}} = \frac{(a-c)^2}{4b} \\ q^{*\text{ΟΛΙΓ}} = \frac{a-c}{(n+1)b} & , & p^{*\text{ΟΛΙΓ}} = \frac{a+nc}{n+1} & & \Pi_i^{\text{ΟΛΙΓ}} = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b} \\ \vdots & , & \vdots & , & \vdots \\ n\to\infty, q^{*\text{ΠΛ}} \to 0 & , & n\to\infty, p^{*\text{ΠΛ}} \to c & , & n\to\infty, \Pi^{*\text{ΠΛ}} \to 0 \end{array}$$

Άσκηση 5

Δυοπώλιο Bertrand[4,5]. Ανταγωνισμός δυοπωλίου ως προς τις τιμές. Υποθέστε τώρα ότι οι επιχειρήσεις παράγουν αγαθά τα οποία δεν είναι πανομοιότυπα, είναι όμως

[4]Βασίζεται στο Gibbons Robert, 1992, A primer in game theory, Published by Harvester Wheatsheaf, σελ. 14-22 και 61-62)

[5]Joseph Louis François Bertrand, 1822 – 1900

υποκατάστατα οπότε η συνάρτηση ζήτησης δίνεται από

$$q_i = a - p_i + bp_j$$

με $b < 2$ και οι επιχειρήσεις ανταγωνίζονται ως προς την τιμή. Η παράμετρος b εκφράζει τον βαθμό υποκαταστασιμότητας των αγαθών. Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν σταθερά κόστη παραγωγής και το οριακό κόστος είναι κοινό για τις δύο επιχειρήσεις και ίσο με $c < a$. Οι επιχειρήσεις κινούνται ''ταυτόχρονα'' και επιλέγουν τιμή διάθεσης του αγαθού p_i στην αγορά λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης $\max\limits_{p_i} \Pi_i \left(p_i, p_j\right)$ όπου

$$\Pi_i \left(p_i, p_j\right) = p_i q_i - C_i$$

Υπολογίστε τη συνάρτηση απόκρισης από τις συνθήκες πρώτης τάξης καθώς και την τιμή επιλογής, την ποσότητα και το κέρδος κάθε επιχείρησης.

Άσκηση 5α - δεν δίνεται ακόμα

Δυοπώλιο Stackelberg[6]. Ανταγωνισμός δυοπωλίου με επιλογή ποσότητας όταν υπάρχει μία κυρίαρχη επιχείρηση που ''κινείται'' πρώτη στην επιλογή ποσότητας. Δυναμικό πρόβλημα.

Άσκηση 6 (εκτός ύλης συνήθως)

Βρείτε τις ιδιοτιμές των παρακάτω μητρών (απλή εξάσκηση)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

[6] Βασίζεται στο Gibbons Robert, 1992, A primer in game theory, Published by Harvester Wheatsheaf, σελ. 14-22 και 61-62)

Άσκηση 7 (πολύ ωραία άσκηση)

Θεωρήστε ότι μία επιχείρηση έχει συνάρτηση κέρδους

$$\Pi(L, K) = pQ(L, K) - wL - rK \tag{1}$$

όπου $Q(\cdot, \cdot)$ είναι η **νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής**, p η τιμή του προϊόντος και L, K είναι τα ‘‘ποσά’’ της εργασίας και του κεφαλαίου ανά μονάδα προϊόντος, w είναι το κόστος εργασίας (π.χ ο μισθός) και r το κόστος (ή η τιμή) του κεφαλαίου. Για την επιχείρηση τα p, w, r **είναι δεδομένα** (**καθορίζονται εξωγενώς**).

Παρένθεση: Η νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής

Ορισμός Νεοκλασσική Συνάρτηση Παραγωγής. Η νεοκλασσική συνάρτηση παραγωγής $Q(K, L)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η συνάρτηση Q είναι ομογενής (homogeneous) πρώτου βαθμού. Επισήμως, για οποιοδήποτε $c \leq 0$, $Q(cK, cL) = cQ(K, L)$. Με άλλα λόγια, η παραγωγή εμφανίζει σταθερές αποδόσεις κλίμακος (constant returns to scale).

2. Και οι δύο συντελεστές παραγωγής είναι απαραίτητοι, δηλαδή, $Q(0, L) = Q(K, 0) = 0$, για οποιοδήποτε K, L.

3. Και οι δύο συντελεστές παραγωγής συμβάλλουν στην παραγωγή:

$$\begin{aligned} MP_K = Q_K(K, L) &= \frac{\partial Q}{\partial K} > 0 \\ MP_L = Q_L(K, L) &= \frac{\partial Q}{\partial L} > 0 \end{aligned}$$

4. Η επιχείρηση έχει **φθίνουσες αποδόσεις προϊόντος** για κάθε συντελεστή παραγωγής ή η συνάρτηση Q είναι **κοίλη** (concave) και στα δύο ορίσματά της:

$$\begin{aligned} \frac{\partial MP_K}{\partial K} = Q_{KK}(K, L) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0 \\ \frac{\partial MP_L}{\partial L} = Q_{LL}(K, L) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0 \end{aligned}$$

5. Οι ‘‘συνθήκες Inada’’ (Inada conditions) ισχύουν:

$$\begin{aligned} \lim_{K \to +\infty} Q_K(K, L) &= 0 \\ \lim_{K \to 0} Q_K(K, L) &= +\infty \end{aligned}$$

και αντίστοιχα για την εργασία.

Υποθέστε ότι η **Εσσιανή** μήτρα H της συνάρτησης παραγωγής είναι αρνητικά ορισμένη. Χρησιμοποιήστε τις Σ.Π.Τ και Σ.Δ.Τ του προβλήματος μεγιστοποίησης $\max\limits_{L,K} \Pi(L,K)$ ώστε να

(α) **Δείξετε** ότι όταν το κόστος εργασίας (π.χ ο μισθός) αυξάνεται η επιχείρηση προσλαμβάνει λιγότερη εργασία

(β) **Δείξετε** ότι όταν το κόστος εργασίας (π.χ ο μισθός) αυξάνεται και η επιχείρηση είναι αναγκασμένη (εξωγενώς, π.χ θεσμικά) να μην μεταβάλλει το κεφαλαιακό της δυναμικό, τότε η επιχείρηση θα μειώσει την εργασία λιγότερο από ότι στην περίπτωση (α). **Σχολιάστε.**

Απάντηση

$$\max_{L,K} \Pi(L,K) \tag{2}$$

Σ.Π.Τ

$$\begin{aligned} pQ_L(L,K) - w &= 0 \qquad (3)\\ pQ_K(L,K) - r &= 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

άρα στο στάσιμο σημείο

$$\frac{Q_L(L^*,K^*)}{Q_K(L^*,K^*)} = \frac{w}{r} \tag{5}$$

Σ.Δ.Τ

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \Pi_{LL}(L,K) & \Pi_{LK}(L,K) \\ \Pi_{KL}(L,K) & \Pi_{KK}(L,K) \end{bmatrix} \qquad (6)\\ &= p\begin{bmatrix} Q_{LL}(L,K) & Q_{LK}(L,K) \\ Q_{KL}(L,K) & Q_{KK}(L,K) \end{bmatrix} \qquad (7)\end{aligned}$$

Άρα η Εσσιανή μήτρα της συνάρτησης κέρδους είναι θετικό πολλαπλάσιο της συνάρτησης παραγωγής η οποία από την εκφώνηση είναι αρνητικά ορισμένη. Άρα $|H_1| < 0$ και $|H_2| = |H| = p^2\left(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2\right) > 0$ για κάθε L, K άρα και για το $L^* = L^*(w,r), K^* = K^*(w,r)$.

Έχουμε μέγιστο στο στάσιμο σημείο.

(α) Πως επηρεάζεται η ζήτηση εργασίας από αύξηση του πραγματικού μισθού, δηλαδή ποιό το πρόσημο της παραγώγου $\frac{\partial L^*}{\partial w}$; Από τις Σ.Π.Τ βρίσκουμε το ολικό διαφορικό ως προς τις μεταβλητές απόφασης L^*, K^* αλλά και ως προς τις παραμέτρους w, r που μπορεί να μεταβληθούν. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις Σ.Π.Τ ως ένα σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων

$$\begin{aligned} F^1(L^*,K^*;w,r) &= 0\\ F^1(L^*,K^*;w,r) &= 0\end{aligned}$$

άρα να λύσουμε με βάση τη σχετική συγκριτική στατική. Ευκολότερα όμως από τις Σ.Π.Τ και την ολική διαφόριση προχωρούμε κατευθείαν στην επίλυση του

$$\begin{aligned} pQ_{LL}dL^* + pQ_{LK}dK^* - dw &= 0 \quad (8)\\ pQ_{KL}dL^* + pQ_{KK}dK^* - dr &= 0 \quad (9) \end{aligned}$$

ή

$$p\begin{bmatrix} Q_{LL} & Q_{LK} \\ Q_{KL} & Q_{KK} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dL^* \\ dK^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dw \\ dr \end{bmatrix} \quad (10)$$

Θέτουμε $dr = 0$ αφού μελετούμε μεταβολές μόνο του μισθού και το σύστημα γράφεται ως

$$p\begin{bmatrix} Q_{LL} & Q_{LK} \\ Q_{KL} & Q_{KK} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dL^*}{dw}\Big|_{dr=0} \\ \frac{dK^*}{dw}\Big|_{dr=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Με βάση τον **κανόνα Cramer**

$$\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dr=0} = \frac{p\begin{vmatrix} 1 & Q_{LK} \\ 0 & Q_{KK} \end{vmatrix}}{p^2\begin{vmatrix} Q_{LL} & Q_{LK} \\ Q_{KL} & Q_{KK} \end{vmatrix}} = \frac{Q_{KK}}{p\left(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2\right)} < 0 \quad (12)$$

(β) Στην περίπτωση αυτή επίσης θέτουμε $dK^* = 0$ άρα έχουμε πλέον μόνο την πρώτη εξίσωση των Σ.Π.Τ προς εκμετάλευση:

$$pQ_{LL}\,\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dK^*,dr=0} = 1 \Leftrightarrow Q_{LL}\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dK^*,dr=0} = \frac{1}{pQ_{LL}} < 0 \quad (13)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{Q_{KK}Q_{LL}}{\left(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2\right)} > 1 \Rightarrow \frac{Q_{KK}Q_{LL}}{p\left(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2\right)} > \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{Q_{KK}}{p\left(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2\right)} < \frac{1}{pQ_{LL}} \quad (14)$$

αφού $Q_{LL} < 0$ και $(Q_{LL}Q_{KK} - Q_{LK}^2) > 0$ άρα

$$\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dr=0} < \frac{dL^*}{dw}\Big|_{dK^*,dr=0} \quad (15)$$

Προσοχή χρειάζεται στο σημείο αυτό διότι και τα δύο πρόσημα είναι αρνητικά άρα σε απόλυτους όρους

$$\left|\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dr=0}\right| > \left|\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dK^*,dr=0}\right| \quad (16)$$

δηλαδή η μείωση στη ζήτηση εργασίας από την επιχείρηση στην περίπτωση (α) είναι **μεγαλύτερη** από ότι στην περίπτωση (β) **όπου δεν μπορεί να υποκαταστήσει εργασία με κεφάλαιο, αφού εξωγενείς παράγοντες πιέζουν την επιχείρηση να διατηρήσει το κεφάλαιο σταθερό**. Ο ρόλος της υποκατάστασης των εισροών (συντελεστών παραγωγής) στο συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται από το ρόλο της σταυροειδούς μερικής παραγώγου Q_{LK} της συνάρτησης παραγωγής. Υποκατάστατες εισροές σημαίνουν $Q_{LK} \neq 0$ (το οριακό προϊόν της εργασίας επηρεάζεται από μεταβολές στον συντελεστή κεφάλαιο) ενώ $Q_{LK} = 0$ θα καθιστούσε τις παραγώγους $\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dr=0}$ και $\frac{dL^*}{dw}\Big|_{dK^*,dr=0}$ ίσες.

Παράρτημα

Το παρακάτω γράφημα της

$$z = 2x^2 + y^2$$

όπου $x, y \in [-1, 1]$ παράγεται μέσω του **geogebra**.