Σύνολο ασκήσεων 5

Άσκηση 1

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους ως προς $x_1, ..., x_n$ ή y, x, z (συμβολισμός f_i ή f_y, f_x, f_z) για τις παρακάτω συναρτήσεις

- $$y = x_1^2 x_2^2 x_3^2$$
- $$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} x_1^2 e^{3+5x_2x_3} + 8\ln(x_1x_2) + \sqrt{x_4}$$
- $$y = g(x, z) = azb^{2x+3} + z^2 + 3x$$
- $$y = f(x, z) = \sqrt{\ln(x) + z^2 + x^2 + xz}$$
- Για τη συνάρτηση παραγωγής **σταθερής ελαστικότητας υποκατάστασης** CES (constant elasticity of substitution)

  $$\begin{aligned} Q &= Q(K, L) \\ &= A\left[\alpha K^{-r} + (1-\alpha) L^{-r}\right]^{-1/r} \end{aligned}$$

  υπολογίστε τα MP_K και MP_L. Δώστε τα οριακά προϊόντα MP_K και MP_L ως συναρτήσεις του Q

  $$\begin{aligned} MP_K &= f(Q) \\ MP_L &= f(Q) \end{aligned}$$

  π.χ.

  $$MP_K = ... = \frac{\alpha}{A^r}\left(\frac{Q}{K}\right)^{r+1}$$

Άσκηση 2

1. Υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης ∇f της συνάρτησης

   $$f(y, x, w, q) = yx^2 w\sqrt{q}$$

   Υπόδειξη:

   $$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y \\ \vdots \end{pmatrix}$$

   Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

   $$\nabla f = \begin{pmatrix} f_y & \cdots \end{pmatrix}'$$

2. Γράψτε την **Εσσιανή** (Hessian) μήτρα δεύτερων μερικών παραγώγων

$$H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

για την συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$

Άσκηση 3

Υπολογίστε το οριακό (φυσικό) προϊόν του κεφαλαίου $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$ και της εργασίας $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$ καθώς και τον **οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης** κεφαλαίου με εργασία $MRTS_{K,L}$.

Σημείωση 1: Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης $MRTS_{K,L}$ είναι ο ρυθμός με τον οποίο μία επιχείρηση υποκαθιστά κεφάλαιο με εργασία (π.χ. αύξηση εργασίας, κίνηση προς τα δεξιά στον άξονα των x στο γράφημα των καμπυλών ίσου προϊόντος). Είναι ίσος με τη μεταβολή στο κεφάλαιο από μία μεταβολή στην εργασία και όπως είδαμε ισούται με τον λόγο των δύο οριακών φυσικών προϊόντων. Επίσης, ο $MRTS$ δίνει την **κλίση** των **καμπυλών ίσου προϊόντος** όπου η κάθε καμπύλη αντιπροσωπεύει συνδυασμούς εισροών/συντελεστών παραγωγής (δηλαδή κεφάλαιο και εργασία) που αποδίδουν την ίδια ποσότητα παραγωγής $\bar{Q}$.

Σημείωση 2: Μαθηματικά, ο λόγος εκφράζεται από:

$$MRTS_{K,L} = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{\partial K}{\partial L}$$

Σας ζητείται να **υπολογίσετε** τον $MRTS_{K,L}$ για τις **παρακάτω συναρτήσεις παραγωγής** και να σχολιάσετε.

- Υποκατάστατες εισροές με συγκεκριμένους παραμετρικούς περιορισμούς $A > 0$, $0 < a < 1$,
$$Q = AK^a L^{1-a} \ \ , \ \ Q, K, L > 0$$
- Υποκατάστατες εισροές με συγκεκριμένους παραμετρικούς περιορισμούς $A > 0$, $0 < a, \beta < 1$,
$$Q = AK^a L^{\beta} \ \ , \ \ Q, K, L > 0$$
- Τέλεια υποκατάστατες εισροές με συγκεκριμένους παραμετρικούς περιορισμούς $0 < a, \beta < 1$,
$$Q = aK + \beta L \ \ , \ \ Q, K, L \geq 0$$

Άσκηση 4

Υπολογίστε την **οριακή χρησιμότητα** $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ και $MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ των αγαθών x, y καθώς και τον **οριακό λόγο υποκατάστασης** του αγαθού y με το αγαθό x

(π.χ. αύξηση στην ζήτηση (κατανάλωση) του x, κίνηση προς τα δεξιά στον άξονα των x στο γράφημα των καμπυλών αδιαφορίας).

$$MRS_{y,x} = -\frac{MU_x}{MU_y}$$

για τις παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας:

- Τύπου **Cobb-Douglas** με περιορισμό στις σταθμίσεις προτίμησης των δύο αγαθών (**υποκατάστατα** αγαθά)

$$u = U(x, y) = x^a y^{1-a} \quad , \quad 0 < a < 1$$

- Τύπου **Cobb-Douglas** χωρίς περιορισμό στις σταθμίσεις προτίμησης των δύο αγαθών (**υποκατάστατα** αγαθά)

$$u = U(x, y) = x^a y^{\beta} \quad , \quad a, \beta > 0$$

- Λογαριθμικού τύπου **Cobb-Douglas** χωρίς περιορισμό στις σταθμίσεις προτίμησης των δύο αγαθών (**υποκατάστατα** αγαθά)

$$u = U(x, y) = a \ln x + \beta \ln y \quad , \quad a, \beta > 0$$

- Ημι-γραμμικού τύπου (**υποκατάστατα** αγαθά)

$$u = U(x, y) = a \ln x + \beta y \quad , \quad a, \beta > 0$$

- Γραμμικού τύπου (**τέλεια υποκατάστατα** αγαθά)

$$u = U(x, y) = ax + \beta y \quad , \quad a, \beta > 0$$

- Μη-παραγωγίσιμη συνάρτηση (**προσοχή**). **Τέλεια συμπληρωματικά** αγαθά (π.χ. αριστερό x και δεξί y παπούτσι με $a, \beta = 1$). Συνάρτηση χρησιμότητας Leontief (Leontief utility function, $a, \beta > 0$)

$$u = U(x, y) = \min\{ax, \beta y\}$$

Άσκηση 5

Έστω ένας καταναλωτής που ‘‘ζεί’’ δύο χρονικές περιόδους 1, 2. Η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από την κατανάλωση c_1, c_2 (την περίοδο 1 και 2 αντίστοιχα). Σας δίνονται οι παρακάτω πιθανές **συναρτήσεις χρησιμότητας**

$$\begin{aligned} U(c_1, c_2) &= \ln c_1 + \beta \ln c_2 \\ U(c_1, c_2) &= \ln c_1 + \beta c_2 \\ U(c_1, c_2) &= \frac{1}{1-\rho}\left(c_1^{1-\rho} + \beta c_2^{1-\rho}\right) \\ U(c_1, c_2) &= e^{-\rho c_1} + e^{-\rho c_2} \end{aligned}$$

Θεωρήστε ότι η κατανάλωση τη δεύτερη χρονική περιόδο c_2 μπαίνει στον κάθετο άξονα και η c_1 στον οριζόντιο άξονα σε ένα γράφημα καμπυλών αδιαφορίας, $c_2 = g(\bar{u}, c_1))$

Θεωρήστε ότι $0 < \beta < 1$ αντιστοιχεί στις **χρονικές προτιμήσεις** του καταναλωτή. Καθώς $\beta \to 0$, ο καταναλωτής γίνεται ολοένα και πιο ανυπόμονος και δεν επιλέγει ποτέ να καταναλώσει τη δεύτερη χρονική περίοδο ενώ καθώς $\beta \to 1$ κατανέμει ισοβαρώς στην συνάρτηση χρησιμότητας την κατανάλωση των χρονικών περιόδων 1 και 2.

Η παράμετρος ρ, όπου δίνεται, **είναι συνάρτηση της (η μετρά την) ελαστικότητα υποκατάστασης**, δηλαδή πως μεταβάλεται ποσοστιαία ο λόγος των δύο εισροών $\frac{c_2}{c_1}$ όταν μεταβληθεί κατά 1% ο οριακός λόγος υποκατάστασης (εναλλακτικά, είναι ένα μέτρο του πόσο εύκολα τα δύο αγαθά υποκαθίστανται κατά μήκος μίας καμπύλης αδιαφορίας)

$$\text{ελαστικότητα υποκατάστασης} \quad = \frac{d\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{d\left|MRS_{1,2}\right|} \cdot \frac{d\left|MRS_{1,2}\right|}{d\left(\frac{c_2}{c_1}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{d\ln\left(\left|MRS_{1,2}\right|\right)}$$

- **Ερώτημα/Άσκηση:** Υπολογίστε τις οριακές χρησιμότητες της κατανάλωσης ανά χρονική περίοδο, MU_{c_1} και MU_{c_2}, τον οριακό λόγο υποκατάστασης

$$MRS_{2,1} = -\frac{MU_{c_1}}{MU_{c_2}}$$

καθώς και την ελαστικότητα υποκατάστασης και προβείτε σε οικονομική ερμηνεία.

Παράδειγμα με ελαστικότητα υποκατάστασης $\sigma = -1$

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας τύπου **Cobb-Douglas**

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
MU_1 &= a x_1^{a-1} x_2^{\beta} \\
MU_2 &= \beta x_1^{a} x_2^{\beta-1} \\
\left|MRS_{2,1}\right| &= \frac{a x_1^{a-1} x_2^{\beta}}{\beta x_1^{a} x_2^{\beta-1}} = \frac{a x_2}{\beta x_1} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{x_2}{x_1}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\ln\left(\left|MRS_{2,1}\right|\right) = \ln\left(\frac{a}{\beta}\right) + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

δηλαδή

$$\frac{d\ln\left(|MRS_{2,1}|\right)}{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = 1$$

οπότε και

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln\left(|MRS_{2,1}|\right)} = 1$$

Παράδειγμα με ελαστικότητα υποκατάστασης σε συνάρτηση παραγωγής

Έστω οι συναρτήσεις παραγωγής

$$(I) : Q = A\min\{aK, \beta L\}$$

$$(II) : Q = AK^{a}L^{\beta}$$

$$(III) : Q = A\left(aK + \beta L\right)$$

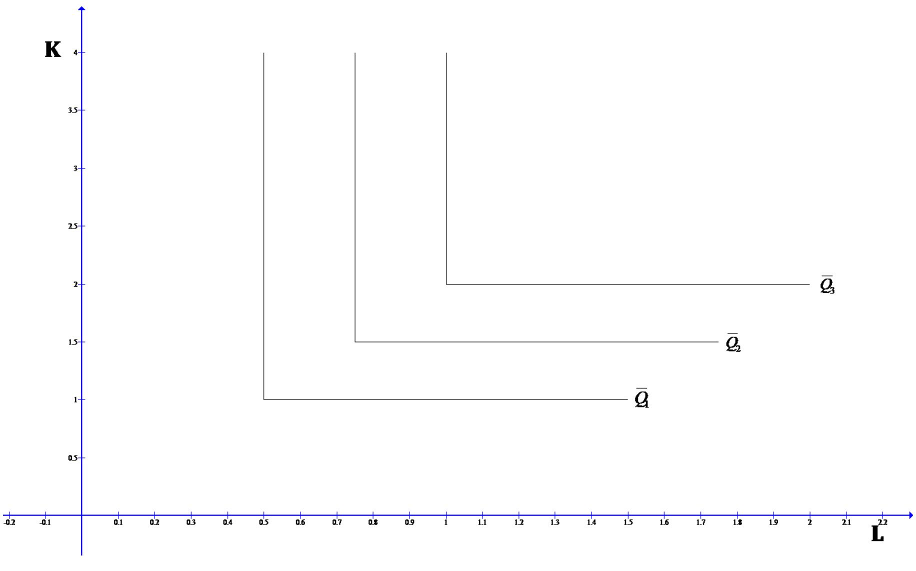
Βρείτε την ελαστικότητα υποκατάστασης σ.

Έχουμε

(I) συνάρτηση παραγωγής Leontief, η μεγαλύτερη δυνατή καμπύλωση των καμπυλών ίσου προϊόντος (έχουν σχήμα L) με ελαστικότητα υποκατάστασης

$$\sigma = 0$$

αφού μία μεταβολή (κίνηση κατά μήκος ή ύψος στην καμπύλη αδιαφορίας) στον $MRTS_{K,L}$ δεν οδηγεί σε μεταβολή στον λόγο K/L

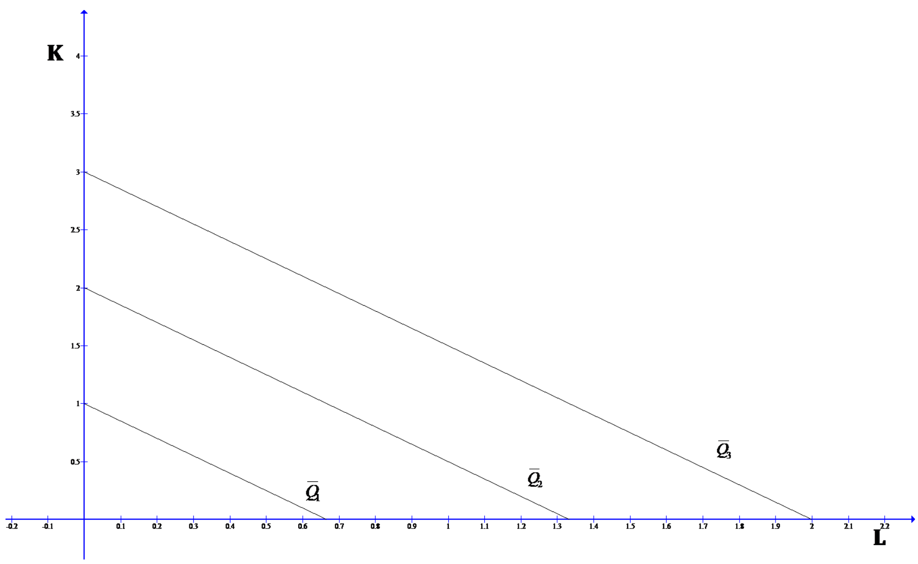


(II) συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas, βλ. παραπάνω άσκηση χρησιμότητας

$$\sigma = ... = 1$$

(III) Τέλεια υποκατάστατες εισροές. Οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι γραμμικές!!

$$|MRTS_{K,L}| = \frac{\beta}{a}$$
$$\ln\left(|MRTS_{K,L}|\right) = \ln\left(\frac{\beta}{a}\right)$$
$$\frac{d\ln\left(|MRTS_{K,L}|\right)}{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)} = 0$$
$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(|MRTS_{K,L}|\right)} = \infty$$



Αν η τιμή του σ είναι μεγάλη, ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης $MRTS$ δε μεταβάλλεται πολύ καθώς μεταβάλλεται η αναλογία (μίγμα) των εισροών $\frac{K}{L}$. Οι καμπύλες ίσου προϊόντος είναι σχετικά επίπεδες (ευθείες) και η υποκατάσταση μεταξύ των εισροών είναι σχετικά εύκολη. Στην περίπτωση που οι εισροές (όπως εδώ) είναι τέλεια υποκατάστατες, η επιχείρηση θα χρησιμοποιεί μόνο εκείνη την εισροή που είναι σχετικά "φτηνότερη". Η γραμμική συνάρτηση παραγωγής σπάνια συναντάται στην πράξη (π.χ. κάθε μηχάνημα χρειάζεται κάποιον εργαζόμενο για να λειτουργήσει).

Άσκηση 6

- Υπολογίστε την Ιακωβιανή μήτρα πρώτων μερικών παραγώγων J για τις παρακάτω δύο συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x,z) = xz^2 \\ y_2 &= f^2(x,z) = 5 + x^2(1+z) \end{aligned}$$

δηλαδή βρείτε τα διανύσματα κλίσεων ∇f^1 και ∇f^2, αναστρέψτε τα $(\nabla f^1)'$, $(\nabla f^2)'$ και τοποθετήστε τα σε μία μήτρα

$$J = \begin{pmatrix} (\nabla f^1)' \\ (\nabla f^2)' \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7

Ελέγξτε αν οι παρακάτω ομάδες συναρτήσεων εξαρτώνται γραμμικά ή μη-γραμμικά[1]

$$\begin{aligned} y_1 &= x + 2z \\ y_2 &= \exp\left\{x^4 + 8x^3z + 24x^2z^2 + 32xz^3 + 16z^4\right\} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ y_2 &= 2x_1^2x_2^2 \\ y_2 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2 \end{aligned}$$

όπου $y_3 = y_1^2 - y_2$ καθώς και (**πιο γενική περίπτωση**, δείτε σημειώσεις παρακάτω)

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 + z^2 \\ y_2 &= x + z \\ y_3 &= e^x \end{aligned}$$

Σημείωση: Έστω οι παρακάτω m συναρτήσεις n μεταβλητών

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 &= f^2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f^m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

ή $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, οι οποίες είναι τουλάχιστον μία φορά παραγωγίσιμες ως προς τις n μεταβλητές $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)'$. Τότε, το ολικό διαφορικό της $\mathbf{y}$ δίνεται από

$$\mathbf{dy} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{dx}$$

[1] Η γραμμική εξάρτηση είναι φυσικά υποσύνολο της μη-γραμμικής εξάρτησης. Η μη-γραμμική εξάρτηση συναρτήσεων καλείται γενικότερα και συναρτησιακή εξάρτηση (functional dependence).

όπου **J** η Ιακωβιανή μήτρα διαστάσεων $m \times n$.

Ο έλεγχος για συναρτησιακή (γραμμική ή μη-γραμμική) εξάρτηση συνίσταται στην **ιδιότητα του πλήρους βαθμού της Ιακωβιανής μήτρας**. Δηλαδή, αν $r(J) = min\{m, n\}$ τότε οι συναρτήσεις είναι ανεξάρτητες.

Η τελευταία ιδιότητα βεβαιώνεται από την εύρεση μη-μηδενικής ορίζουσας:

$$|J \cdot J'| \neq 0 \quad \text{ή} \quad |J' \cdot J| \neq 0$$

(ανάλογα με το ποιά διάσταση είναι μεγαλύτερη).

Στο παραπάνω παράδειγμα θα βρείτε ότι

$$|J' \cdot J| = (2x - 2z)^2 + e^{2x\left(4z^2+1\right)} \neq 0 \quad , \quad \forall x, z \in \mathbb{R}$$

ενώ στο **παρακάτω παράδειγμα**

$$\begin{aligned} y_1 &= x + y + w \\ y_2 &= e^{x+z+w} \end{aligned}$$

θα βρείτε ότι $|J \cdot J'| = ... = 0$.

Άσκηση 8

Βρείτε το ολικό διαφορικό των συναρτήσεων

$$y = f(x, z, w) = x^2 + z^2 + xzw + \ln(2w + 5)$$

$$y = f(x, z) = \frac{x}{x + z}$$

$$U(x, y) = x^a y^\beta$$

Άσκηση 9

Είναι γνωστό ότι

$$\frac{d \ln X}{dt} = \frac{(dX/X)}{dt} = g_X$$

δείχνει το **ρυθμό μεγέθυνσης** μίας μεταβλητής στο χρόνο αφού dX/X δίνει ποσοστιαία μεταβολή και $\frac{(dX/X)}{dt}$ δίνει ποσοστιαία μεταβολή στο χρόνο. Για παράδειγμα αν $X(t) = e^{\delta t}$ τότε

$$\frac{d \ln X}{dt} = \frac{d(\delta t)}{dt} = \delta \, (= g_X)$$

δηλαδή σταθερή ποσοστιαία μεταβολή $(100 \times \delta)\%$ στο χρόνο. Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = A(t)\, K^a(t) L(t)^\beta$$

όπου $A(t)$ παριστά τεχνολογική πρόοδο ή αύξηση της παραγωγικότητας με ρυθμό μεγέθυνσης g_A, $K(t)$ το κεφάλαιο με ρυθμό μεγέθυνσης να δίνεται από το g_K, και $L(t)$ η εργασία με ρυθμό μεγέθυνσης g_L ίσο με το ρυθμό μεγέθυνσης του εργατικού δυναμικού ή του πληθυσμού. Τα α, β δείχνουν μερίδια κεφαλαίου και εργασίας στη παραγωγή. Δείξτε ότι

$$g_Q = g_A + a g_K + \beta g_L$$

δηλαδή ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος g_Q δίνεται από το άθροισμα των ρυθμών μεγέθυνσης της τεχνολογίας, του κεφαλαίου και της εργασίας με τους δύο τελευταίους ρυθμούς να σταθμίζονται με τα αντίστοιχα μερίδια παραγωγής a, β.

Άσκηση 10

Έστω ότι

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, w) \\ x_1 &= g(w), x_2 = k(w) \end{aligned}$$

Βρείτε τις ολικές παραγώγους

$$\frac{dy}{dw} =; \quad , \quad \frac{dy}{dx_i} =;$$

Κατόπιν, για εξάσκηση, θέστε

$$f(x_1, x_2, w) = (x_1 x_2 w)^2$$

με

$$x_1 = 5w + 1$$

και

$$x_2 = 2\ln(w)$$

και στην συνέχεια υπολογίστε αναλυτικά τις ολικές παραγώγους

$$\frac{dy}{dw} =; \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dx_i} =;$$

Άσκηση 11

Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Y = f(\xi, \Omega) = \xi + (1 - a)\Omega$ όπου ξ ένα ‘‘σοκ’’ παραγωγικότητας και Ω οι ώρες εργασίας ενώ $(1 - a)$ το μερίδιο της εργασίας στην παραγωγή. Υποθέτουμε ότι οι ώρες εργασίας είναι συνάρτηση της παραγωγικότητας και αν τα (θετικά) σοκ παραγωγικότητας μειώνουν τις ώρες εργασίας τότε υποθέτουμε συνολικά ότι $\Omega = G(\xi)$ με $G' < 0$. **Υπολογίστε** την ολική παράγωγο

$$\frac{dY}{d\xi}$$

και δείξτε ότι $a < 1$ υπονοεί $\frac{dY}{d\xi} < 1$.

Απάντηση

$$dY = f_\xi d\xi + f_\Omega d\Omega \Rightarrow \frac{dY}{d\xi} = f_\xi + f_\Omega \frac{d\Omega}{d\xi} = f_\xi + f_\Omega G' = 1 + (1-a)G'$$

Άρα

$$\frac{dY}{d\xi} = 1 + (1-a)G' < 1 \Rightarrow (1-a)G' < 0 \Rightarrow a < 1$$

Άσκηση 12

Με βάση το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων βρείτε τις παρακάτω παραγώγους (μερικές ή ολικές όπου ζητείται)

$$\begin{array}{cc} F(y,x) = 5xy^2 + 2 = 0 & \frac{dy}{dx} =; \;\; \frac{dx}{dy} =; \\ F(y,x) = \ln(5xy^2+2) + 3x + 6y = 0 & \frac{dy}{dx} =; \;\; \frac{dx}{dy} =; \\ F(y,x) = a\ln(x) + \beta\ln(y) + y^2x^2 = 0 & \frac{dy}{dx} =; \;\; \frac{dx}{dy} =; \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} F(y,x,z) = x^2y^3 + z^2 + xyz = 0 & \frac{\partial y}{\partial x} =; \;\; \frac{\partial y}{\partial z} =; \\ F(y,x,z) = \ln(xyz) + x^3 - 2z = 0 & \frac{\partial y}{\partial x} =; \;\; \frac{\partial y}{\partial z} =; \\ F(y,x,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = 0 & \frac{\partial y}{\partial x} =; \;\; \frac{\partial y}{\partial z} =; \end{array}$$

Άσκηση 13

Έστω ότι Y ακαθάριστο εθνικό προϊόν μίας κλειστής οικονομίας και r το επίπεδο του επιτοκίου[2] οι **ενδογενείς** μεταβλητές και G_0, M_0 οι **εξωγενείς** μεταβλητές όπου G_0 οι κρατικές ή δημόσιες δαπάνες[3] που ελέγχονται από το κράτος[4] και M_0 η προσφορά χρήματος που ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα[5]. $L(Y, r)$ συμβολίζει τη ζήτηση χρήματος[6] στην οικονομία με πρόσημα μερικών παραγώγων $L_Y > 0$ και $L_r < 0$. Επίσης $Y^d = Y - T$, η οριακή ροπή προς κατανάλωση δίνεται υπό μορφή μερικής παραγώγου και όχι αναλυτικά $0 < C_Y < 1$, $T = T(Y)$, το ίδιο και ο συντελεστής φορολογίας $0 < T_Y < 1$ ενώ η επένδυση εξαρτάται αρνητικά από το επιτόκιο $I_r < 0$. Για μία απλή κλειστή οικονομία, σας δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$Y = C(Y^d) + I(r) + G_0$$

$$L(Y, r) = M_0$$

Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων και την σχέση που ρυθμίζει την γενική συγκριτική ανάλυση ενός τέτοιου συστήματος και βρείτε αν μία αύξηση των κρατικών δαπανών G_0 αυξάνει το επιτόκιο r.

Σημειώσεις: Η βασική σχέση αναφοράς είναι η

$$J\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_i} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}$$

όπου $\mathbf{y} = (Y, r)$ οι **ενδογενείς μεταβλητές** και $x_1 = G_0$, $x_2 = M_0$ οι **εξωγενείς**

[2] Το επιτόκιο είναι το κόστος δανεισμού χρηματικών κεφαλαίων από επιχειρήσεις και νοικοκυριά και όπως πολλές φορές αναφέρεται, είναι η τιμή του χρήματος. Με λίγα λόγια, ο τόκος είναι το κόστος του δανείου, ενώ **το επιτόκιο προσδιορίζει το κόστος του δανεισμού**. $r = 0.05$ αντιστοιχεί σε επιτόκιο 5%.

[3] Οι κρατικές (ή δημόσιες) δαπάνες και η φορολογία αποτελούν τα κύρια στοιχεία του κρατικού προϋπολογισμού.

[4] Ασκεί τη *δημοσιονομική* πολιτική

[5] Ασκεί τη *νομισματική* πολιτική. Η προσφορά χρήματος προσδιορίζεται από την Κεντρική Τράπεζα και το τραπεζικό σύστημα. Τον τελικό λόγο έχει πάντοτε η Κεντρική Τράπεζα, ενώ οι εμπορικές τράπεζες ακολουθούν τους κανόνες που θέτει η Κεντρική και προσαρμόζονται στις αλλαγές που αυτή επιβάλλει. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε ότι η προσφορά χρήματος προσδιορίζεται από την Κεντρική Τράπεζα η οποία ασκεί τη νομισματική πολιτική. Οι αποφάσεις της Κεντρικής Τράπεζας δεν είναι αυθαίρετες, αλλά βασίζονται στην εξέλιξη του επιπέδου των τιμών (δηλαδή του ρυθμού πληθωρισμού), της ανεργίας, κ.λπ. Σε σχέση με το επιτόκιο, μπορούμε να πούμε ότι η προσφορά χρήματος είναι ανεξάρτητη του επιτοκίου. Η Κεντρική Τράπεζα με τις αποφάσεις της για την προσφορά χρήματος επιδρά στο ύψος του επιτοκίου, αλλά οι αποφάσεις αυτές δεν εξαρτώνται από το επιτόκιο.

[6] Με τον όρο "**ζήτηση χρήματος**" εννοούμε ότι οι επιχειρήσεις και τα νοικοκυριά κρατούν χρήμα προς διευκόλυνση των συναλλαγών τους. Οι επιχειρήσεις χρειάζονται χρήμα για να πληρώσουν το εργατικό δυναμικό, τις πρώτες ύλες κ.λπ. Και τα νοικοκυριά χρειάζονται χρήμα για να πληρώσουν τους λογαριασμούς τους και τα καθημερινά τους έξοδα. Συνεπώς, επιχειρήσεις και νοικοκυριά κρατούν μια ποσότητα χρήματος σε κάθε χρονική περίοδο για την πληρωμή των υποχρεώσεών τους και άλλων αναγκών. Αυτή η διακράτηση χρήματος είναι η *ζήτηση χρήματος*.

μεταβλητές ενώ οι **δύο** πεπλεγμένες εξισώσεις είναι οι

$$\begin{aligned} F^1(Y,r,G_0,M_0) &= Y - C(Y - T(Y)) - I(r) - G_0 = 0 \\ F^2(Y,r,G_0,M_0) &= L(Y,r) - M_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial r} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial r}{\partial G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial G_0} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 - C_Y(1 - T_Y) & -I_r \\ L_Y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial r}{\partial G_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Σημείωση 1: Δείτε ότι $\frac{\partial F^1}{\partial Y} = 1 - C_Y(1 - T_Y) > 0$

Σημείωση 2: Δείτε ότι $|J| = (1 - C_Y(1 - T_Y))\, L_r + L_Y I_r < 0$

Σημείωση 3: Δείτε ότι $|J_2| = -L_Y < 0$

Άρα ...