Περίγραμμα διάλεξης 4

1 Συστήματα Εξισώσεων

Ένα σύνολο m γραμμικών (ως προς τις x μεταβλητές) εξισώσεων της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
a_{m-1,1} & x_1 & + & a_{m-1,2} & x_2 & + & & + & a_{m-1,n} & x_n & = & b_{m-1} \\
a_{m1} & x_1 & + & a_{m,2} & x_2 & + & & + & a_{m,n} & x_n & = & b_m
\end{array}$$

καλείται γραμμικό σύστημα.

Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε τη μήτρα A και τα διανύσματα στήλες x και b όπως παρακάτω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{pmatrix}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε *"εύκολα"* το σύστημα σε μορφή μητρών

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$$

όπου A **η μήτρα συντελεστών** των x ενώ A, b είναι οι **παράμετροι του συστήματος**.

- Μια $n-$άδα αριθμών $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)'$ που επαληθεύει τις εξισώσεις του παραπάνω γραμμικού συστήματος $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$ θα καλείται λύση αυτού και το σύνολο όλων των λύσεων θα καλείται γενική λύση του συστήματος. Όταν ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστο μία λύση θα καλείται **συμβιβαστό** διαφορετικά **αδύνατο ή μη συμβιβαστό**.

- Στην περίπτωση όπου οι συντελεστές b_i των σταθερών όρων είναι όλοι ίσοι με μηδέν το σύστημα θα καλείται **ομογενές** (homogeneous)

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \mathbf{0}_{m\times 1}$$

  διαφορετικά καλείται **μη-ομογενές** (non-homogeneous).

- Ο $m \times (n+1)$ πίνακας $(A|b)$ που προκύπτει από την **επαύξηση** του πίνακα A προς τα δεξιά με το διάνυσμα των σταθερών b, καλείται **επαυξημένος** και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & a_{m-1,n} & b_{m-1} \\ a_{m1} & a_{m,2} & & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

- Στην περίπτωση που αντικαταστήσουμε μία στήλη της μήτρας συντελεστών A με το διάνυσμα στήλη των σταθερών b, τότε γράφουμε A_i όπου ο δείκτης i συμβολίζει τη στήλη της A που αντικαταστάθηκε. Για παράδειγμα

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m-1} & a_{m-1,2} & & a_{m-1,n} \\ b_m & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & b_{m-1} & & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & b_m & & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & & b_{m-1} \\ a_{m1} & a_{m,2} & & b_m \end{pmatrix}$$

1.1 Παράδειγμα

Σύστημα ζήτησης-προσφοράς. Έχουμε τις **παραμέτρους** $a, b, c, d > 0$ όπου b, d είναι συντελεστές (μπροστά από την τιμή P) και a, c είναι σταθερές μαζί με μία συνθήκη ισορροπίας, $Q^d = Q^s$.

Γράφουμε το σύστημα ζήτησης/προσφοράς,

$$\begin{aligned} Q^d &= a - bP \\ Q^s &= -c + dP \end{aligned}$$

$$Q^d = Q^s \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Q &= a - bP \\ Q &= -c + dP \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Q + bP &= a \\ Q - dP &= -c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ -c \end{pmatrix}}$$

Οι μεταβλητές Q και P καλούνται **ενδογενείς μεταβλητές** αφού καθορίζονται από το σύστημα.

Γενίκευση 1: Για μεταβλητές που θεωρούνται **εξωγενείς** ή **σταθερές** στο σύστημα, δηλαδή δεν μεταβάλλονται αφού δεν δίνεται σχέση που να περιγράφει την εξάρτησή τους από κάποια άλλη μεταβλητή του συστήματος (**δίνονται εξωγενώς**) ή δεν μεταβάλλονται όταν μεταβάλλονται οι ενδογενείς μεταβλητές (για οποιοδήποτε λόγο) θα χρησιμοποιούμε τον **υποδείκτη 0** ή τον **συμβολισμό της παύλας πάνω** από την μεταβλητή. Για παράδειγμα, έστω ότι η μεταβλητή U_0 ή $\bar{U}$ υποδηλώνει προτιμήσεις οι οποίες θεωρούμε ότι μεταβάλλονται δύσκολα ή παραμένουν σταθερές για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Τότε, γράφουμε ένα σύστημα ζήτησης - προσφοράς ως (περιλαμβάνει και μία εξωγενή μεταβλητή τώρα):

$$\begin{aligned} Q^d &= a \quad -bP \quad +\gamma U_0 \\ Q^s &= -c \quad +dP \\ Q^d &= Q^s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Q &= a \quad -bP \quad +\gamma U_0 \;\Rightarrow\; Q + bP = a + \gamma U_0 \\ Q &= -c \quad +dP \qquad\quad\;\, \Rightarrow\; Q - dP = -c \end{aligned}$$

οπότε

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a + \gamma U_0 \\ -c \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Προσέξτε ότι οι εξωγενείς ή σταθερές μεταβλητές εισάγονται στο διάνυσμα των σταθερών παραμέτρων $\mathbf{b}$.

Γενίκευση 2: Έστω η **εξωγενής** μεταβλητή του εισοδήματος I και η **εξωγενής** μεταβλητή T που υποδηλώνει επίπεδο τεχνολογικής ανάπτυξης (αποτελεσματικής μεταβολής εισροών σε προϊόν, είτε αφορά φυσικό κεφάλαιο είτε αφορά ανθρώπινο κεφάλαιο ή και τα δύο). Οι μεταβλητές I, T καλούνται **εξωγενείς** αφού δεν καθορίζονται από το σύστημα και θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό I_0, T_0. Τότε, ένα (ακόμα) γενικότερο σύστημα ζήτησης-προσφοράς δίνεται από τις παρακάτω δύο εξισώσεις (πάντα υπονοείται η εξίσωση ισορροπίας $Q^d = Q^s$)

Συνάρτηση ζήτησης:

$$\begin{aligned} & Q^d = a - bP + \gamma U_0 + \kappa I_0 \\ \Rightarrow\ & Q^d = a - bP + \gamma U_0 + \kappa I_0 \\ \Rightarrow\ & Q^d + bP = a + \gamma U_0 + \kappa I_0 \end{aligned}$$

και **Συνάρτηση προσφοράς:**

$$\begin{aligned} & Q^s = -c + dP + \lambda T_0 \\ \Rightarrow\ & Q^s = -c + dP + \lambda T_0 \\ \Rightarrow\ & Q^s - dP = -c + \lambda T_0 \end{aligned}$$

Άρα (μαζί με την $Q^d = Q^s$), **υπό μορφή συστήματος με χρήση μητρών**, μετακινούμε τις **ενδογενείς** μεταβλητές **αριστερά** του ίσον (και προσέχουμε την διάταξή τους) και τις **εξωγενείς** μεταβλητές **μαζί με σταθερές δεξιά** του ίσον και γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \gamma U_0 + \kappa I_0 \\ -c + \lambda T_0 \end{pmatrix}$$

Αν υπάρχει **μία λύση** στο σύστημα εξισώσεων τότε αυτή γράφεται ως

$$\begin{pmatrix} Q^* \\ P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_Q^* \left(a, b, c, d, \lambda, \gamma, \kappa; U_0, I_0, T_0\right) \\ f_P^* \left(a, b, c, d, \lambda, \gamma, \kappa; U_0, I_0, T_0\right) \end{pmatrix}$$

1.2 Συγκριτική στατική ανάλυση (comparative statics)

Θα είχε ενδιαφέρον να μελετήσουμε την αντίδραση των μεταβλητών του συστήματος στη θέση ισορροπίας όταν μεταβληθεί κάποια από τις παραμέτρους a, b, c, d, γ, κ, λ ή κάποια από τις "σταθερές" μεταβλητές U_0 ή κάποια από τις εξωγενείς μεταβλητές I_0, T_0. Π.χ. αλλαγές διαρθρωτικών παραμέτρων όπως της γ, που αντανακλά **προτιμήσεις**, ή μεταβολές στην οικονομική πολιτική κτλ. Η συγκεκριμένη ανάλυση καλείται **συγκριτική στατική ανάλυση**. Π.χ. αν μεταβληθεί η παράμετρος των προτιμήσεων με όλα τα άλλα να παραμένουν σταθερά (ceteris paribus), τότε τι θα συμβεί (πώς θα μεταβληθεί) **η ποσότητα και τιμή ισορροπίας**;

$$\frac{dQ^*}{d\gamma} =; \quad , \quad \frac{dP^*}{d\gamma} =;$$

Ένα άλλο ερώτημα. Αν μεταβληθούν οι προτιμήσεις U_0, τότε πως μεταβάλλεται η τιμή ισορροπίας; Από τι επηρεάζεται η συγκεκριμένη μεταβολή;

$$\frac{dP^*}{dU_0} =;$$

2 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Κάθε μία από τις παρακάτω διαδικασίες θεωρείται ένας **στοιχειώδης μετασχηματισμός**:

ΣΤ.ΜΕΤ.1 Πολλαπλασιασμός μίας εξίσωσης (γραμμής) του συστήματος με μη-μηδενικό αριθμό

ΣΤ.ΜΕΤ.2 Εναλλαγή στη θέση 2 εξισώσεων

ΣΤ.ΜΕΤ.3 Πρόσθεση (αφαίρεση) σε μια εξίσωση (γραμμής) πολλαπλάσιου άλλης

Έστω οι πίνακες A, B. Θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι **γραμμοισοδύναμος** με τον B, εάν ο B προκύπτει από τον A μέσα από μια πεπερασμένη ακολουθία **στοιχειωδών μετασχηματισμών των γραμμών** του A

Αν συνεχίσουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (μόνο μέσω των πράξεων, δηλαδή στοιχειωδών μετασχηματισμών, όπως αναφέρονται παραπάνω), οποιαδήποτε $m \times n$ μήτρα A μπορεί να μειωθεί σε μία **κλιμακωτή μήτρα** (row echelon μήτρα) RE_A που ορίζεται από την παρακάτω δομή:

(α). αν μια γραμμή έχει μη-μηδενικά στοιχεία, το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο (οδηγός ή pivot) είναι ίσο με 1

(β). αν μία στήλη περιέχει έναν οδηγό, τότε όλα τα στοιχεία στην στήλη κάτω από το 1 είναι ίσα με μηδέν

(γ). αν μία γραμμή έχει οδηγό, τότε κάθε γραμμή από κάτω της περιέχει τον οδηγό της δεξιότερα

Προσοχή: η ανηγμένη κλιμακωτή δεν είναι μοναδική (π.χ. **αφαιρέστε** οποιαδήποτε γραμμή από την **παραπάνω** γραμμή και ...). Δηλαδή διαφορετικοί στοιχειώδεις μετασχηματισμοί ή σειρά τους μπορεί να δώσουν μία εναλλακτική κλιμακωτή μορφή.

Παραδείγματα κλιμακωτών μητρών RE_A

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Μία μήτρα RRE_A βρίσκεται σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** ή ανηγμένη echelon μορφή (reduced row echelon form) **αν επιπλέον των παραπάνω ισχύει ότι** (δ). Το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε σειράς είναι το μόνο μη-μηδενικό στοιχείο **της στήλης του**

Προσοχή: Κάθε μήτρα έχει **μοναδική ανηγμένη μορφή**, δηλαδή όπως και αν εφαρμόσουμε τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς θα καταλήξουμε πάντα στην **ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή**. Γι'αυτό τονίζουμε την ανηγμένη μορφή μίας μήτρας έναντι της **μίας** κλιμακωτής μορφής (από τις πολλές) που μπορεί να έχει μία μήτρα.

Παραδείγματα ανηγμένων κλιμακωτών μητρών RRE_A

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Βαθμός μήτρας και κλιμακωτές

Ο βαθμός μίας κλιμακωτής μήτρας είναι **ίσος με τον αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών της** και ίσος με το βαθμό της μήτρας A από όπου προήλθε. Είναι γνωστό ότι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών δεν μεταβάλλουν το βαθμό μίας μήτρας και επειδή η κλιμακωτή και ανηγμένη κλιμακωτή λαμβάνονται μέσω στοιχειδών μετασχηματισμών γραμμών **διατηρούν το βαθμό** της αρχικής μήτρας.

Αν συμβολίσουμε με RE_A μία κλιμακωτή μήτρα που προήλθε από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στις γραμμές της μήτρας A τότε

$$r(A) = r(RE_A) = r(RRE_A)$$

π.χ. οι παρακάτω δύο μήτρες είναι διαστάσων 3×2 άρα μπορούν να έχουν βαθμό $r(A) \leq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{στοιχ. μετασχ.}}{\cdots\cdots} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = RE_A$$

και ο βαθμός της A είναι ίσος με $r(A) = r(RE_A) = 1$.

Στην δεύτερη περίπτωση

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{στοιχ. μετασχ.}}{\cdots\cdots} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = RE_A$$

και ο βαθμός της A είναι ίσος με $r(A) = r(RE_A) = 2$ (είναι πλήρους βαθμού).

2.1.1 Παραδείγματα

Κατά τη διαδικασία των στοιχειωδών μετασχηματισμών, R_i θα συμβολίζει την $i-$οστή γραμμή του πίνακα A και των στοιχειωδών μετασχηματισμών του

Παράδειγμα 1
Έστω η 3×4 μήτρα A με

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 4 & 4 \\ -10 & -4 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Βρείτε τον βαθμό της A.

Απάντηση 1
Η μήτρα A θα πρέπει να έχει βαθμό $r(A) \leq 3$. Μάλιστα, αν $r(A) = 3$ τότε είναι πλήρους (γραμμο)βαθμού. Προβαίνουμε σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς και λαμβάνουμε

$$\begin{pmatrix} 20 & 8 & 4 & 4 \\ -10 & -4 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{20}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -10 & -4 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+10R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = RE_A$$

Άρα ο βαθμός της A είναι $r(A) = 1$ αφού ο βαθμός $r\left(RE_A\right) = 1$ (ίσος με τον αριθμό των μη-μηδενικών γραμμών της RE_A) και η A δεν είναι πλήρους βαθμού.

Παράδειγμα 2
Έστω η 3×2 μήτρα A με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Βρείτε τον βαθμό της A.

Απάντηση 2
Η μήτρα A θα πρέπει να έχει βαθμό $r(A) \leq 2$. Αν $r(A) = 2$ τότε είναι πλήρους (στηλο)βαθμού. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = RE_A$$

Άρα ο βαθμός της A είναι $r(A) = 2$ και η A είναι πλήρους βαθμού.

Παράδειγμα 3
Έστω η 3×3 μήτρα A με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Βρείτε τον βαθμό της A.

Απάντηση 3
Η μήτρα A θα πρέπει να έχει βαθμό $r(A) \leq 3$. Αν $r(A) = 3$ τότε είναι πλήρους βαθμού. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{8}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = RE_A$$

Άρα ο βαθμός της A είναι $r(A) = r(RE_A) = 3$ και η A είναι πλήρους βαθμού (η κλιμακωτή RE_A δεν έχει καμμία μηδενική γραμμή άρα είναι επίσης βαθμού $= 3$).

2.2 Λύση συστήματος με απαλοιφή Gauss-Jordan (Gauss-Jordan Elimination)

Στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων, η απαλοιφή Gauss είναι ένας συγκεκριμένος αλγόριθμος για την εύρεση **πρώτα** της **κλιμακωτής** μήτρας RE **και μετά** της **ανηγμένης κλιμακωτής** RRE, αν αυτό χρειάζεται, (Gauss-Jordan) του επαυξημένου πίνακα $A|b$ με στόχο να βρούμε τη λύση (ή λύσεις ή αδύνατο) του συστήματος.[1]

Ο **χαρακτηρισμός** των λύσεων - όπως θα δούμε παρακάτω - θα δίνεται μέσω του βαθμού της κλιμακωτής μήτρας του επαυξημένου $RE_{A|b}$ και της σχέσης του με τον βαθμό της μήτρας συντελεστών $r(A)$ **ενώ η λύση του συστήματος** μέσω της ανηγμένης κλιμακωτής μήτρας του επαυξημένου $RRE_{A|b}$.

Συγκεκριμένα:

1. Ξεκινώντας από την πρώτη γραμμή του επαυξημένου $A|b$ δημιουργήστε μία στήλη με μηδενικά κάτω από κάθε οδηγό (κλιμακωτή μήτρα): κίνηση προς τα "εμπρός".

[1] Δείτε εδώ για online λύση συστήματος γραμμικών εξισώσεων με χρήση της συγκεκριμένης μεθοδολογίας `https://matrix.reshish.com/gauss-jordanElimination.php`

Άρα θέτουμε το πρώτο επάνω αριστερά στοιχείο ίσο με 1 διαιρώντας την πρώτη γραμμή με το πρώτο στοιχείο. Στη συνέχεια προχωρούμε σε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς ώστε να μηδενίσουμε τα πρώτα στοιχεία των υπόλοιπων γραμμών κ.ο.κ. Συνεχίζουμε μέχρι να δημιουργήσουμε την $RE_{A|b}$

2. Στη συνέχεια δημιουργήστε μία στήλη με μηδενικά πάνω από κάθε οδηγό (ανηγμένη κλιμακωτή): κίνηση προς τα *"πίσω"*. Η κατάληξη είναι ένας **ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας**, έστω $RRE_{A|b}$ που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $A|b$. Αυτός ο πίνακας μας δίνει τη λύση ή τις (άπειρες) λύσεις του συστήματος ή δείχνει ότι το σύστημα δεν έχει λύση αφού καταλήγουμε σε αδύνατο.

2.2.1 Παράδειγμα

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Βρείτε τη λύση του με χρήση της απαλοιφής Gauss-Jordan.

Βήμα 1: Προς τα εμπρός (forward) για εύρεση κλιμακωτού πίνακα

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-5R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{5}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{14}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = RE_{A|b}$$

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να σταματήσουμε (απαλοιφή Gauss μόνο) και να παρατηρήσουμε ότι $1 \cdot x_3 = 1$ από την τελευταία γραμμή, $x_2 - 3x_3 = -5$ από την δεύτερη γραμμή οπότε $x_2 = -2$, άρα με αντικαταστάσεις στην πρώτη έχουμε ότι $x_1 + \frac{1}{2}(-2) - \frac{3}{2}(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 3$.

Βήμα 2: Προς τα πίσω (backwards) για εύρεση ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = RRE_{A|b}$$

Άρα η λύση δίνεται από

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Οι λύσεις ...

Κάθε γραμμικό σύστημα δύναται να έχει

1. *Μία μοναδική Λύση*
2. *Άπειρες Λύσεις*
3. *Να μην έχει Λύση*

Χαρακτηρισμός λύσεων. Έστω ότι A είναι η $m \times n$ μήτρα συντελεστών στο σύστημα

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{x} = \underset{m \times 1}{b}$$

Τότε

- αν $r(A|b) = r(A) = n \Rightarrow$ το σύστημα είναι συμβιβαστό, μία μοναδική λύση
- αν $r(A|b) = r(A) < n \Rightarrow$ το σύστημα είναι συμβιβαστό, άπειρες (πολλαπλές) λύσεις
- αν $r(A|b) = r(A) + 1 \Rightarrow$ το σύστημα είναι μη-συμβιβαστό, δεν υπάρχουν λύσεις

Άλλοι οικονομικοί χαρακτηρισμοί

- Όταν το σύστημα είναι **ακριβώς ταυτοποιημένο (προσδιορισμένο)** $m = n$ τότε μπορεί να έχει 1 λύση, άπειρες λύσεις ή καμμία λύση
- Όταν το σύστημα είναι **υπερταυτοποιημένο** (**υπερπροσδιορισμένο**) $m > n$ τότε μπορεί να έχει 1 λύση, άπειρες λύσεις ή καμμία λύση
- Όταν το σύστημα είναι **υποταυτοποιημένο** (**υποπροσδιορισμένο**) $m < n$ τότε μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμμία λύση

3.1 Παράδειγμα

Έστω ότι έχετε το σύστημα $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$$

για κάποια a, β.

Ο βαθμός της μήτρας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ είναι $r(A) = 1$ αφού η κλιμακωτή της A δίνει $RE_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Αν προβείτε σε απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 6 & \beta \end{pmatrix}$ θα καταλήξετε στην (μοναδική) ανηγμένη κλιμακωτή

$$\begin{aligned} (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 6 & \beta \end{pmatrix} &\rightarrow \text{απαλοιφή Gauss: } R_2 - 2R_1 \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & \beta - 2a \end{pmatrix} &= RRE_{A|b} \end{aligned}$$

- Στην περίπτωση που $\beta - 2a = 0 \Rightarrow \beta = 2a$ (π.χ. $a = 1$, $\beta = 2$) έχουμε

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  άρα

$$r\left(A|b\right) = 1 = r\left(A\right) < n = 2$$
$$\text{συμβιβαστό σύστημα με άπειρες (πολλαπλές) λύσεις}$$

  Σε τέτοιες περιπτώσεις, θέτουμε $x_1 + 3x_2 = 1$ και θεωρώντας το x_2 ως μία "***ελεύθερη παράμετρο*** λ", οι λύσεις δίνονται από $x_2 = \lambda$ και $x_1 = 1 - 3\lambda$. Αντίστοιχα, θέτουμε $x_1 = \lambda$ (θεωρούμε την x_1 ως ελεύθερη παράμετρο) και οι λύσεις του συστήματος δίνονται από $x_1 = \lambda$ και $x_2 = \frac{1-\lambda}{3}$.

- Στην περίπτωση που $\beta - 2a \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 2a$ (π.χ. $a = 1, \beta = -1$) τότε

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

και

$$r\left(A|b\right) = 2 = r\left(A\right) + 1 \Rightarrow \text{μη-συμβιβαστό, δεν υπάρχουν λύσεις}$$

αφού το σύστημα υπονοεί

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 &= -5 \end{aligned}$$

που είναι **αδύνατο**.

3.2 Λύση Cramer

Gabriel Cramer (1704-1752). Ελβετός μαθηματικός (Swiss Mathematician), ανέπτυξε τον κανόνα (Cramer's Rule), δημοσιεύτηκε το 1750.

Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους εκφρασμένο στην μορφή $Ax = b$.

Έστω ότι ο πίνακας συντελεστών A είναι αντιστρέψιμος. Τότε $|A| \neq 0$, και το σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση** η οποία δίνεται από $x^* = A^{-1}b$.

Η λύση Cramer δίνει κατευθείαν την απάντηση για κάθε μία από τις x μεταβλητές χωρίς να χρειάζεται να προβούμε σε αντιστροφή της A.

Ειδικότερα, όταν A είναι $n \times n$ και $|A| \neq 0$, οι λύσεις για τις $x_1, ..., x_n$ δίνονται από

$$x_i^* = \frac{|A_i|}{|A|} \ , \ i = 1, 2, ..., n$$

Η μήτρα A_i (την έχουμε δει παραπάνω) είναι η A με αντικατάσταση της $i-$οστής στήλης της με το διάνυσμα b.

3.2.1 Παράδειγμα

Για τα μακροοικονομικά παραδείγματα έχω πάρει υλικό είτε **αυτούσιο** είτε **μερικώς ξαναγραμμένο** από **το βιβλίο:**

Λιανός, Θ., Ψειρίδου, Α., 2015. Οικονομική ανάλυση και πολική - Μακροοικονομική. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Διαθέσιμο ηλεκτρονικά στο αποθετήριο: `https://repository.kallipos.gr/handle/11419/1954`

- Y : **εγχώριο προϊόν - Α.Ε.Π** (πλευρά δαπάνης). Ένας τρόπος μέτρησης του ΑΕΠ είναι το άθροισμα των δαπανών που έχουν πραγματοποιηθεί για αγορά προϊόντων που παρήχθησαν στη χώρα κατά τη διάρκεια μιας χρονικής περιόδου. Αγορές προϊόντων που έχουν παραχθεί σε προηγούμενες περιόδους δεν λαμβάνονται υπόψιν για τον υπολογισμό του ΑΕΠ. Π.χ. αγορές μεταχειρισμένων προϊόντων. Οι δαπάνες αγοράς Y χωρίζονται στις εξής κατηγορίες: κατανάλωση C, επένδυση I, κρατικές δαπάνες G, και εξαγωγές X μείον εισαγωγές M. Ο λόγος για τον οποίον γίνεται αυτή η ταξινόμηση των δαπανών δεν είναι τόσο το είδος και η φύση των προϊόντων, όσο οι διαφορετικοί παράγοντες που προσδιορίζουν το ύψος της κάθε δαπάνης

- C : δαπάνες για αγορά **καταναλωτικών** αγαθών. Η **κατανάλωση** περιλαμβάνει τα **διαρκή** καταναλωτικά αγαθά, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές φορές για τη χρήση για την οποία αγοράστηκαν. Για παράδειγμα, διαρκή αγαθά είναι τα βιβλία, τα έπιπλα του νοικοκυριού, τα ψυγεία και οι άλλες μηχανές που χρησιμοποιούνται στο νοικοκυριό. Τα **καταναλωτά** αγαθά, τα οποία είναι αυτά που μπορεί να χρησιμοποιηθούν μια φορά για τον σκοπό για τον οποίον αγοράστηκαν. Τέτοια αγαθά είναι τα τρόφιμα, τα φάρμακα, το οινόπνευμα, η βενζίνη, κ.λπ. Οι **υπηρεσίες**, δηλαδή τα **άϋλα αγαθά**, τα οποία είναι τα πανεπιστημιακά μαθήματα, η ιατρική περίθαλψη, οι συναυλίες, το κούρεμα, κ.λπ.

- I_0 : Επένδυση, π.χ. Δαπάνες (επιχειρήσεων) για αγορά κεφαλαιουχικών αγαθών, Δαπάνες των ατόμων για αγορά κατοικιών, Μεταβολές στα αποθέματα των επιχειρήσεων (Εάν τα αποθέματα αυξάνονται, η επένδυση είναι θετική και εάν μειώνονται, είναι αρνητική. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι μεταβολές των αποθεμάτων δεν είναι πάντοτε επιθυμητές. Μια επιχείρηση μπορεί να αυξήσει τα αποθέματα ενός προϊόντος επειδή προβλέπει αύξηση των πωλήσεων, αλλά τα αποθέματα μπορούν να αυξηθούν εάν η ζήτηση δεν απορροφήσει όλη την παραγωγή).

- T : άμεσοι και έμμεσοι φόροι αλλά και φόροι που δεν σχετίζονται με το εισόδημα (π.χ. φόροι επί του πλούτου). Το κράτος (κυβέρνηση) προβαίνει σε δαπάνες G, αλλά ταυτοχρόνως εισπράττει διάφορα χρηματικά ποσά από τους πολίτες. Οι κρατικές εισπράξεις είναι κυρίως οι φόροι T οι οποίοι, κυρίως, είναι **αύξουσα** συνάρτηση του εισοδήματος.

- $Y_d = Y - T$: διαθέσιμο εισόδημα (Η εισαγωγή των φόρων στην ανάλυση δημιουργεί μια νέα μεταβλητή, το διαθέσιμο εισόδημα). Ο σημαντικότερος παράγοντας για τον προσδιορισμό της κατανάλωσης είναι το επίπεδο του διαθέσιμου εισοδήματος. Η σχέση της κατανάλωσης προς το διαθέσιμο εισόδημα ονομάζεται συνάρτησης κατανάλωσης $C = C(Y, T) = C(Y_d)$ και είναι μία **αύξουσα** συνάρτηση του εισοδήματος.

Με βάση τα παραπάνω, δίνουμε **τρεις απλές γραμμικές εξισώσεις** που περιγράφουν μία **κλειστή οικονομία** (χωρίς εμπόριο και/ή εξωτερικό δανεισμό) και έστω ότι οι δημόσιες δαπάνες λογίζονται ως επένδυση και εξωγενώς εντάσονται στο I_0.

$$\begin{array}{lcll} Y & = & C + I_0 & \text{Συνθήκη ισορροπίας} \\ C & = & a + \beta(Y - T) & \text{Συνάρτηση κατανάλωσης} \\ T & = & k + tY & \text{Συνάρτηση φορολογίας} \end{array}$$

όπου

- όπου η σχέση $Y = C + I$ συχνά λέγεται **συνθήκη ισορροπίας του εισοδήματος** αφού η συνολική ζήτηση C, I_0 έχει εξισωθεί με τη συνολική προσφορά

- β : **η οριακή ροπή προς κατανάλωση** (marginal propensity to consume), $0 < \beta < 1$. Αύξηση (μείωση) της κατανάλωσης λόγω αύξησης (μείωσης) του εισοδήματος

- t : συντελεστής φορολόγησης εισοδήματος, $0 < t < 1$

Ερώτημα: Λύστε το παραπάνω σύστημα τριών εξισώσεων ώστε να προσδιορίσετε το **εισόδημα**, **κατανάλωση** και **φορολογία ισορροπίας**.

Απάντηση: Γράφουμε το σύστημα στη μορφή $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ a \\ k \end{pmatrix}$$

με την ορίζουσα της μήτρας συντελεστών A να δίνεται από

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & 1 & \beta \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \beta(1-t) > 0$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα των σταθερών $\mathbf{b}$ στην **πρώτη** στήλη της A έχουμε την ορίζουσα

$$|A_1| = \begin{vmatrix} I_0 & -1 & 0 \\ a & 1 & \beta \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + I_0 - \beta k$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα των σταθερών $\mathbf{b}$ στην **δεύτερη** στήλη της A έχουμε την ορίζουσα

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & I_0 & 0 \\ -\beta & a & \beta \\ -t & k & 1 \end{vmatrix} = a + \beta\,(1-t)\,I_0 - \beta k$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα των σταθερών $\mathbf{b}$ στην **τρίτη** στήλη της A έχουμε την ορίζουσα

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -\beta & 1 & a \\ -t & 0 & k \end{vmatrix} = at + tI_0 + k\,(1-\beta)$$

Οπότε, η λύση **Cramer** για το σύστημα δίνει

$$\begin{aligned} Y^* &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{a + I_0 - \beta k}{1 - \beta(1-t)} \\ C^* &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{a + \beta\,(1-t)\,I_0 - \beta k}{1 - \beta(1-t)} \\ T^* &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{at + tI_0 + k\,(1-\beta)}{1 - \beta(1-t)} \end{aligned}$$

Συγκριτική στατική ανάλυση

Μία εξωγενής μεταβολή στην επένδυση dI_0 δεν οδηγεί σε 1-προς-1 μεταβολή του εισοδήματος ισορροπίας $\frac{dY^*}{dI_0} \neq 1$ παρά την ύπαρξη της ταυτότητας $Y = C + I_0$.

Απεναντίας λειτουργεί ένα **πολλαπλασιαστικό** αποτέλεσμα όπου

$$\frac{dY^*}{dI_0} = \frac{1}{1-\beta(1-t)}$$

με

$$\frac{dY^*}{dI_0} = \frac{1}{1-\beta(1-t)} > 1$$

αφού $0 < \beta(1-t) < 1$.

Επειδή

- ο συντελεστής β εκφράζει την οριακή ροπή προς κατανάλωση ενώ
- ο συντελεστής t εκφράζει το φορολογικό συντελεστή (ποσοστό του εισοδήματος που παίρνει το κράτος μέσω φόρου.)

έχουμε ότι

- ο όρος $\beta(1-t)$ εκφράζει τον διορθωμένο ως προς τη φορολογία συντελεστή οριακής ροπής προς κατανάλωση ενώ η **ορίζουσα** $1-\beta(1-t)$ είναι το ποσοστό του εισοδήματος που δεν καταναλώθηκε (άρα υποθέτουμε ότι επανεπενδύθηκε κτλ πολ/ντας το αποτέλεσμα της αρχικής επένδυσης)

Τέλος, παρατηρήστε (και συζητήστε) τα (οριακά) αποτελέσματα

$$\lim_{t\to 0}\frac{dY^*}{dI_0} = \frac{1}{1-\beta}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{dY^*}{dI_0} = 1$$

δηλαδή τι συμβαίνει στο εισόδημα ισορροπίας όταν μεταβληθεί η επένδυση καθώς ο συντελετής φορολόγησης τείνει (θεωρητικά) στο μηδέν ή στη μονάδα.

4 Γενικές Ασκήσεις

4.1 Άσκηση 1

Για παράδειγμα έστω το σύστημα 2 ςξισώσεων

$$\begin{aligned} Q &= a_1 - a_2 P + a_3 \bar{A} \\ Q &= b_1 + b_2 P \end{aligned}$$

με θετικές παραμέτρους $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 > 0$, το οποίο γράφεται ως (**ενδογενείς μεταβλητές όλες αριστερά** στη "σωστή" θέση)

$$\begin{aligned} a_2 P + Q &= a_1 + a_3 \bar{A} \\ -b_2 P + Q &= b_1 \end{aligned}$$

ή υπο μορφή μητρών $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -b_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \bar{A} \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα $|A| \neq 0$ της μήτρας συντελεστών A διαφέρει του μηδενός αφού οι συντελεστές a_2, b_2 είναι θετικοί

$$|A| = \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ -b_2 & 1 \end{vmatrix} = a_2 + b_2 \neq 0$$

οπότε η αντίστροφη της μήτρας συντελεστών δίνεται από

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & -\frac{1}{a_2+b_2} \\ \frac{b_2}{a_2+b_2} & \frac{a_2}{a_2+b_2} \end{pmatrix}$$

και η **λύση** του συστήματος (σημείο ισορροπίας προσφοράς-ζήτησης) από

$$\begin{pmatrix} P^* \\ Q^* \end{pmatrix} = A^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & -\frac{1}{a_2+b_2} \\ \frac{b_2}{a_2+b_2} & \frac{a_2}{a_2+b_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \bar{A} \\ b_1 \end{pmatrix}$$

και με λίγη άλγεβρα (πολλαπλασιάστε τις δύο μητρες δεξιά της ισότητας)

$$\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} P^* \\ Q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_3 \bar{A} + a_1 - b_1}{a_2+b_2} \\ \frac{b_2 a_3 \bar{A} + b_2 a_1 + a_2 b_1}{a_2+b_2} \end{pmatrix}$$

Συγκριτική στατική ανάλυση

$$\frac{dP^*}{d\bar{A}} = \frac{a_3}{a_2 + b_2} > 0$$

$$\frac{dQ^*}{d\bar{A}} = \frac{b_2 a_3}{a_2 + b_2} = b_2 \frac{dP^*}{d\bar{A}} > 0$$

Λύση Cramer

$$P^* = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 + a_3\bar{A} & 1 \\ b_1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_3\bar{A} + a_1 - b_1}{a_2 + b_2}$$

$$Q = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_1 + a_3\bar{A} \\ -b_2 & b_1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{b_2 a_3 \bar{A} + b_2 a_1 + a_2 b_1}{a_2 + b_2}$$

4.2 Άσκηση 2

Έστω τώρα ότι

- G_0 : Δημόσιες Δαπάνες (G), που περιλαμβάνουν τις *δημόσιες επενδύσεις* και τη *δημόσια κατανάλωση*[2]

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= a + b(Y - T) \\ T &= d + tY \end{aligned}$$

όπου Y, C, T οι **ενδογενείς** μεταβλητές (δεν έχουν υποδείκτες 0 ή το σύμβολο της παύλας πάνω από το συμβολισμό τους).

- Βρείτε τη λύση του συστήματος όταν $a > 0$, $d > 0$ και $0 < b < 1$, $0 < t < 1$.

[2]Από **Λιανός, Θ., Ψειρίδου, Α., 2015**: "*Για την ανάλυση που ακολουθεί θα κάνουμε την υπόθεση ότι οι κρατικές δαπάνες, που αποκαλούνται επίσης κυβερνητικές δαπάνες και συμβολίζονται με το γράμμα G (από τον όρο Government spending), προσδιορίζονται από την κυβέρνηση ανεξάρτητα από άλλες οικονομικές μεταβλητές. Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει ότι ο προσδιορισμός των κρατικών δαπανών είναι αυθαίρετος. Η κυβέρνηση λαμβάνει υπόψιν της διάφορους παράγοντες, όπως την έκταση της ανεργίας, την αναγκαιότητα ορισμένων δαπανών για την εκπαίδευση ή το στρατό, την κατάσταση του κρατικού προϋπολογισμού, δηλ. την ύπαρξη ελλειμμάτων ή πλεονασμάτων, κ.λπ. Εδώ, για λόγους απλούστευσης της ανάλυσης, υποθέτουμε ότι για κάθε χρονική περίοδο το ύψος των κρατικών δαπανών είναι δεδομένο και ανεξάρτητο του εισοδήματος*".

- Δείξτε ότι (**συγκριτική στατική ανάλυση**)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_2 t} > 0 \text{ όπου } \begin{cases} \lambda_1 = I_0 + G_0 + a \\ \lambda_2 = \frac{b}{1-b} \end{cases}$$

Απάντηση

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ C \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 + G_0 \\ a \\ d \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 - b(1-t) \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-b(1-t)} & \frac{1}{1-b(1-t)} & -\frac{b}{1-b(1-t)} \\ \frac{b-bt}{1-b(1-t)} & \frac{1}{1-b(1-t)} & -\frac{b}{1-b(1-t)} \\ \frac{t}{1-b(1-t)} & \frac{t}{1-b(1-t)} & -\frac{b-1}{1-b(1-t)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A^{-1}b} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-b(1-t)} & \frac{1}{1-b(1-t)} & -\frac{b}{1-b(1-t)} \\ \frac{b(1-t)}{1-b(1-t)} & \frac{1}{1-b(1-t)} & -\frac{b}{1-b(1-t)} \\ \frac{t}{1-b(1-t)} & \frac{t}{1-b(1-t)} & \frac{1-b}{1-b(1-t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 + G_0 \\ a \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} Y^* \\ C^* \\ T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_0+G_0+a-bd}{1-b(1-t)} \\ \frac{b(1-t)(I_0+G_0)+a-bd}{1-b(1-t)} \\ \frac{t(I_0+G_0)+at+d(1-b)}{1-b(1-t)} \end{pmatrix}$$