Σύνολο ασκήσεων 3

Άσκηση 1

Έστω ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_T \end{pmatrix}'$$

με αναμενόμενη τιμή

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{T\times 1}$$

και με μήτρα διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{x}) &= E(\mathbf{x}\mathbf{x}') - E(\mathbf{x})E(\mathbf{x})' \\ &= E(\mathbf{x}\mathbf{x}') - \mathbf{0}_{T\times 1}\mathbf{0}_{1\times T} \\ &= E(\mathbf{x}\mathbf{x}') - \mathbf{0}_{T\times T} \\ &= E(\mathbf{x}\mathbf{x}') \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

που δίνεται από

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_T^2 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{x}$ περιέχει ασυσχέτιστες γραμμικά τυχαίες μεταβλητές όπου $(\Sigma)_{i,j} = Cov(x_i, x_j) = 0$ και κάθε τυχαία μεταβλητή έχει μηδενικό μέσο $E(u_i) = 0$ και διακύμανση $Var(u_i) = \sigma_i^2$ για $i = 1, ..., T$.

- Βρείτε την ορίζουσα $|\Sigma|$. Βρείτε την αντίστροφη μήτρα Σ^{-1}.
- Σας δίνεται ο παρακάτω μαθηματικός τύπος που σχετίζεται με το παραπάνω τυχαίο διάνυσμα x,

  $$f(x) = (2\pi)^{-T/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right\}$$

  Ο συγκεκριμένος τύπος εκφράζει την απο-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος[1] αν κάποιος επιβάλλει την υπόθεση ότι

  $$\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}_{T\times 1}, \Sigma)$$

  Αναπτύξτε (ουσιαστικά απλοποιήστε) τον μαθηματικό τύπο για την λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητας του διανύσματος $\ln[f(x)]$ έτσι ώστε να μην περιέχει συμβολισμούς μητρών αλλά αθροίσματα. **Υπόδειξη:** Θα καταλήξετε ότι $\ln[f(x)] = -\frac{T}{2}\ln(2\pi)\cdots$

[1] Συνάρτηση πιθανότητας διανύσματος.

- Υποθέστε στην παραπάνω άσκηση ότι

$$\mathbf{x} \sim N\left(\mathbf{0}_{T\times 1}, \sigma^2 I_T\right)$$

Προβείτε σε επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης

$$\max_{\sigma^2} \ln[f(x)]$$

Υπόδειξη: θα βρείτε από τις Σ.Π.Τ ότι στο βέλτιστο σημείο[2]

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} x_i^2$$

και θα πρέπει να βεβαιώσετε τοπικό μέγιστο χρησιμοποιώντας τις Σ.Δ.Τ

Άσκηση 2

Υπολογίστε την αντίστροφη των παρακάτω τετραγωνικών μητρών

1. $\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2x & 5 \\ -2 & y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0.88 & 2.64 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0.5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 8-10a \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. Δείξτε αν η ταυτοδύναμη μήτρα N που ορίζεται από την

$$N = I_n - \mathbf{i}\left(\mathbf{i}'\mathbf{i}\right)^{-1}\mathbf{i}'$$

είναι συμμετρική. **Σημείωση:** $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}'$

[2] Συμβολίστε το σ^2 που λύνει τις Σ.Π.Τ ως $\hat{\sigma}^2$, όπως στα Μαθηματικά Ι χρησιμοποιήσαμε το x^* για να συμβολίσουμε το στάσιμο σημείο του προβλήματος $\max_x f(x)$.

5. Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες του ίχνους και βρείτε το ίχνος $tr\,(N)$ της ταυτοδύναμης μήτρας N. **Σημείωση:** Για συμμετρικές ταυτοδύναμες μήτρες A, ο βαθμός $r(A)$ είναι ίσος με το ίχνος, δηλαδή $r(A) = tr(A)$

6. Είναι η μήτρα N αντιστρέψιμη;

7. Δείξτε ότι για ένα διάνυσμα
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
έχουμε
$$Ny = y - \mathbf{i}\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}$$
άρα
$$(Ny)' \cdot (Ny) = y'N'Ny = y'Ny = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

8. Μία πραγματική τετραγωνική μήτρα $\underset{n\times n}{A}$ είναι **ορθογώνια** όταν[3] $AA' = A'A = I_n$. Δείξτε ότι[4] η
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
είναι ορθογώνια.

Άσκηση 3 gretl

Σε αυτή την άσκηση, δημιουργήστε ένα φάκελο στον σκληρό σας δίσκο με το όνομα (για παράδειγμα) `C:\MathimatikaII` και μέσα στο φάκελο δημιουργήστε ένα inp αρχείο με όνομα AskisiInverse.inp. Γράψτε τις παρακάτω εντολές στο AskisiInverse.inp αρχείο και σώστε το.

[3] Άρα όταν ισχύει $A' = A^{-1}$

[4] Karim M. Abadir and Jan R. Magnus 2005. **Matrix Algebra**. Cambridge University Press (p. 85)

```
clear
set messages off
set echo off
matrix A = zeros(5,5)
A[1,1] = -5
A[1,2] = 9
A[1,3] = 0.5
A[1,4] = 1
A[1,5] = 0
A[2,1] = 1
A[2,2] = 4
A[2,3] = 6
A[2,4] = 0
A[2,5] = 2
A[3,1] = 5
A[3,2] = -3
A[3,3] = 3
A[3,4] = 4
A[3,5] = -7
A[4,1] = 1
A[4,2] = 1
A[4,3] = 4
A[4,4] = 2
A[4,5] = 2
A[5,1] = 0.88
A[5,2] = -0.05
A[5,3] = 3
A[5,4] = -1
A[5,5] = 1
A1 = inv(A)
test1 = A * A1
test2 = A1 * A
detA = det(A)
AdjA = A1*detA
C = AdjA'
printf "\n\n"
printf "\n-------------------------------------------------------------\n"
printf "\n Αντίστροφη μήτρα : \n%12.6f\n",A1
printf "\n A*A{-1} : \n%12.6f\n", test1
printf "\n-------------------------------------------------------------\n"
```

Ουσιαστικά εισάγετε την παρακάτω μήτρα και υπολογίζετε την αντίστροφή της (μαζί με άλλες αλγεβρικές λεπτομέρειες)

$$\begin{pmatrix} -5 & 9 & 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0.88 & -0.05 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Επαναλάβετε την άσκηση για την μήτρα

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0.5 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4 gretl

Δημιουργήστε τη μήτρα

$$N = I_n - \mathbf{i}\left(\mathbf{i}'\mathbf{i}\right)^{-1}\mathbf{i}'$$

με $n = 10$ στο gretl.

```
n = 10
mIn = I(n)
vi = ones(n,1)
N = mIn - (1/n) * vi * vi'
```

Η μήτρα N είναι συμμετρική ταυτοδύναμη και **μη-αντιστρέψιμη**. Πληκτρολογήστε την εντολή `eval inv(N)`. Τι συμβαίνει; Επαναλάβετε την άσκηση με $n = 1000$.