



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 7^η: Δυσικότητα

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει στον αναγνώστη η δυσικότητα και να υπογραμμιστεί η ερμηνεία της.
- ✓ Να παρουσιαστούν τα θεωρήματα και οι ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ.
- ✓ Να καταστεί σαφές πως το πρωτεύον και το δυικό πρόβλημα συνδέονται μεταξύ τους.



Περιεχόμενα ενότητας

- Δυσικότητα: Γενικές έννοιες.
- Αντιστοιχία του πρωτεύοντος και του δυικού ΠΓΠ.
- Κανόνες μετατροπής του πρωτεύοντος σε δυικό.
- Παραδείγματα.
- Οικονομική ερμηνεία του δυικού ΠΓΠ.
- Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ και θεωρήματα.
- Συμπεράσματα.



Ενότητα 7^η

Από το πρωτεύον στο δυικό ΠΓΠ

Δυσικότητα - I

- Κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού συνδέεται με ένα άλλο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που ονομάζεται δυικό (dual) ενώ το αρχικό πρωτεύον (primal).
- Η δυική θεωρία παρέχει πληροφορίες κυρίως οικονομικής φύσεως ενώ είναι διαφωτιστική και για την ανάλυση των επιπτώσεων της αλλαγής των παραμέτρων.
- Επίσης, η άριστη λύση του δυικού είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την λύση του πρωτεύοντος.
- Ο διάυλος επικοινωνίας του πρωτεύοντος και του δυικού είναι το σύνολο των περιορισμών του πρωτεύοντος.



Δυσικότητα - II

- Σε ορισμένα εγχειρίδια χρησιμοποιείται ρητά ο όρος της ημι-κανονικής μορφής και την χρήσης του δυικού ΠΓΠ μέσω αυτής.
 - Θα πρέπει να τονίσουμε ότι στην περίπτωση της ημι-κανονικής μορφής, η συνθήκη ότι όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές αφαιρείται και δεν ισχύει.
- ❖ **Πρόταση:** Το δυικό ΠΓΠ του δυικού είναι το πρωτεύον.



Δυσκότητα - III

- Ας θεωρήσουμε το ΠΓΠ με την παρακάτω μορφή:

$$\max_{x_1, x_2, \dots, x_n} Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + \dots \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + \dots \leq b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \leq \dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j \dots + a_{mn}x_n + \dots \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0,$$

$$c_j, b_i, a_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$$

- Ή σε μορφή πινάκων:

$$\pm \max \mathbf{c}' \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Δυσκότητα - IV

- Μέσω της παρακάτω διαδικασίας μπορούμε να μετατρέψουμε το πρωτεύον ΠΓΠ σε δυικό:

$$\begin{array}{l} \pm \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (Πρωτεύον)} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \pm \min \mathbf{b}^T \mathbf{w} \text{ (Δυικό)} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{w} \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{w} \geq 0 \end{array}$$

$$\min_{w_1, w_2, \dots, w_n} y = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_n$$

s.t.

$$a_{11} w_1 + \dots + a_{j1} w_j + \dots + a_{m1} w_n + \dots \leq c_1$$

$$a_{12} w_1 + \dots + a_{j2} w_j + \dots + a_{m2} w_n + \dots \leq c_2$$

$$\dots \leq \dots$$

$$a_{1n} w_1 + \dots + w_{jm} x_j + \dots + a_{mn} w_n + \dots \leq c_m$$

$$w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0,$$



Κανόνες μετατροπής σε δυικό ΠΓΠ

Κατά την διαδικασία μετατροπής, πραγματοποιούνται τα παρακάτω:

- Μια δυική μεταβλητή ορίζεται για κάθε έναν περιορισμό του πρωτεύοντος ΠΓΠ (θα έχουμε τόσες δυικές μεταβλητές όσους και περιορισμούς).
- Ένας δυικός περιορισμός ορίζεται για κάθε μεταβλητή του πρωτεύοντος ΠΓΠ (κάθε περιορισμός του δυικού αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή του πρωτεύοντος)
- Οι συντελεστές των μεταβλητών ενός δυικού προβλήματος ισούνται με τους συντελεστές της συνδεόμενης μεταβλητής του πρωτεύοντος ΠΓΠ.
- Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του δυικού ΠΓΠ ταυτίζονται με τα δεξιά μέλη των περιορισμών του πρωτεύοντος .



Αντιστοιχία μεταξύ των 2 ΠΓΠ

Πρωτεύον Πρόβλημα	Δυϊκό Πρόβλημα
Πρόβλημα μεγιστοποίησης	Πρόβλημα ελαχιστοποίησης
Περιορισμός τύπου $i \geq$	Μεταβλητή $u_i \leq 0$
Περιορισμός τύπου $i \leq$	Μεταβλητή $u_i \geq 0$
Περιορισμός τύπου $i =$	Μεταβλητή u_i χωρίς περιορισμό
Μεταβλητή $x_j \geq 0$	Περιορισμός τύπου $j \geq$
Μεταβλητή $x_j \leq 0$	Περιορισμός τύπου $j \leq$
Μεταβλητή x_j χωρίς περιορισμό	Περιορισμός τύπου $j =$
Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης	Συντελεστής δεύτερου μέλους
Συντελεστής δεύτερου μέλους	Συντελεστής Αντικειμενικής συνάρτησης



Παράδειγμα - Ι

❖ Να μετατραπεί στο δικό του το παρακάτω ΠΓΠ:

$$\max_{x_1, x_2} Z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Παράδειγμα - Ι (Απάντηση)

$$\max_{w_1, w_2, w_3, w_4} Y = 8w_1 + 6w_2 + 15w_3 + 18w_4$$

s.t.

$$w_1 + w_3 + 2w_4 \geq 4$$

$$w_2 + 2w_3 + w_4 \geq 3$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

	x_1	x_2		
w_1	1	0	\leq	8
w_2	0	1	\leq	6
w_3	1	2	\leq	15
w_4	2	1	\leq	18



Οικονομική ερμηνεία δυικού ΠΓΠ - Ι

- Γενικότερα θα λέγαμε ότι τα ΠΓΠ ασχολούνται με προβλήματα κατανομής περιορισμού αριθμού πόρων σε διαφορετικές εναλλακτικές και ανταγωνιστικές δραστηριότητες.

- Εάν a είναι η ποσότητα του πόρου i για την παραγωγή j μονάδων, c_j η αύξηση στο μέτρο αποδοτικότητας Z από την αύξηση κατά μία μονάδα της τότε:
 - Η αντικειμενική συνάρτηση παριστάνει το συνολικό κέρδος
 - Το $\sum a_{ij}x_j$ των περιορισμών (αριστερό μέλος) παριστάνει την συνολική ποσότητα πόρων που θα χρησιμοποιηθούν και θα είναι μικρότεροι των διαθέσιμων πόρων b .



Οικονομική ερμηνεία δυικού ΠΓΠ - II

➤ Σε κάθε ΠΓΠ μπορούμε να θεωρήσουμε τα εξής:

x_j : μονάδες προϊόντος

c_j : αξία

b_i : μονάδες διαθέσιμου πόρου

a_{ij} : χρησιμοποιούμενος πόρος ανά μονάδα προϊόντος



Οικονομική ερμηνεία δικού ΠΓΠ - III

Άρα το πρωτεύον ΠΓΠ μας δείχνει με ποιον τρόπο θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε:

$$\pm \max \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha\xiία}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right) \cdot \pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j$$

$$\pm \max \sum_{j=1}^n \left(\frac{\alpha\xiία}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right) \cdot \pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j \equiv \alpha\xiία$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi\rho\rho\rho\rho_i}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right) \cdot \pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi\rho\rho\rho\rho_j}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right) \cdot \pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j \equiv \pi\rho\rho\rho\rho$$

Τι μας δείχνει το δικό;

$$\pm \max \sum_{j=1}^n (\pi\rho\rho\rho\rho_i) \cdot w_i$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \left(\frac{\pi\rho\rho\rho\rho_i}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right) \cdot w_i \geq \left(\frac{\alpha\xiία}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right)$$

$$w_i \equiv \left(\frac{\alpha\xiία}{\pi\rho\alpha\delta\omicron\nu_j} \right)$$



Οικονομική ερμηνεία δικού ΠΓΠ - IV

“..... Σε ποιες τιμές πρέπει η επιχείρηση να αγοράσει τους πόρους (πρώτες ύλες, συντελεστές παραγωγής κλπ.) ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής (ή αγοράς) αλλά και να προσφέρει καλύτερες τιμές προϊόντων προκειμένου να έχει οικονομικό κίνητρο πώλησης των αποθεμάτων της”



Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ - I

➤ Θεώρημα 1

Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού τότε:
 $c'x \leq b'w$ (ασθενής δυικότητα)

➤ Θεώρημα 2

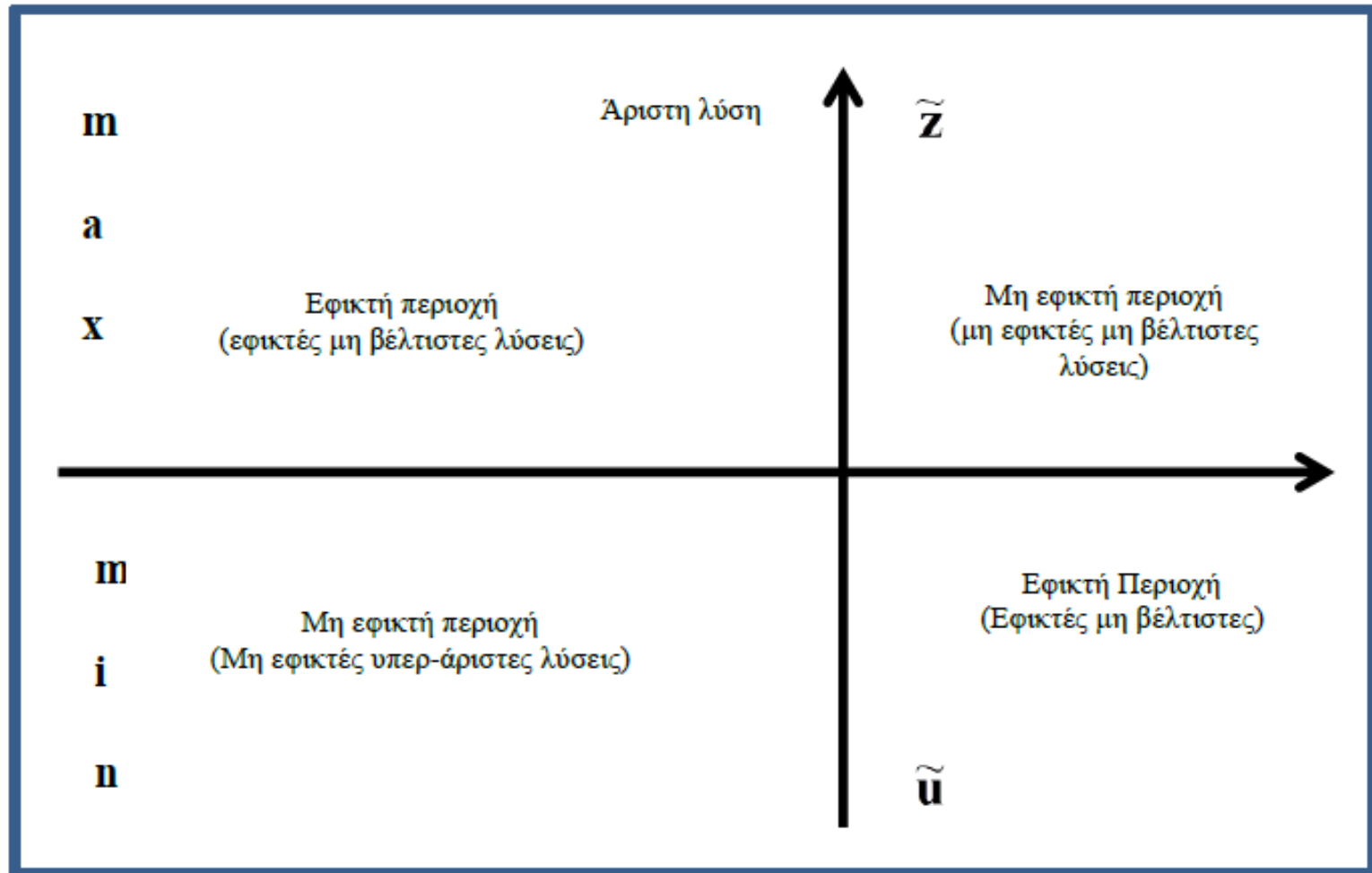
Εάν x μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και w του δυικού έτσι ώστε
 $c'x = b'w$ τότε τα x και w είναι άριστες λύσεις του πρωτεύοντος και
του δυικού αντίστοιχα.

➤ Θεώρημα 3

Εάν το πρωτεύον ΠΓΠ είναι μη φραγμένο τότε το δυικό του δεν έχει
εφικτές λύσεις.



Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ – Θεώρημα 2



Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ - II

➤ Θεώρημα 4

Εάν το δυικό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις, τότε το πρωτεύον είτε δεν έχει εφικτές λύσεις είτε είναι μη φραγμένο.

▪ Θεώρημα Δυισμού

Εάν το πρωτεύον ΠΓΠ έχει άριστη λύση τότε το δυικό του έχει άριστη λύση και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών του συναρτήσεων είναι ίσες (Gale, Kuhn and Tucker, 1950).



Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ - III

➤ Θεώρημα 5

Έστω $w' = c'B^{-1}$. Εάν $c_i - z_i \geq 0, \forall i$ η λύση w είναι μια βασική εφικτή λύση του δυικού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

▪ Θεώρημα Συμπληρωματικού Περιθωρίου

Εάν στο ένα πρόβλημα ένας περιορισμός του είναι αδρανής η αντίστοιχη μεταβλητή του άλλου προβλήματος είναι μηδέν και επίσης εάν μια μεταβλητή είναι θετική τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ενεργός (έχει την μορφή εξίσωσης).



Ιδιότητες του δυικού ΠΓΠ - IV

➤ Θεώρημα 6

Μια εφικτή λύση του ενός προβλήματος θέτει ένα φράγμα στην βέλτιστη λύση του άλλου.

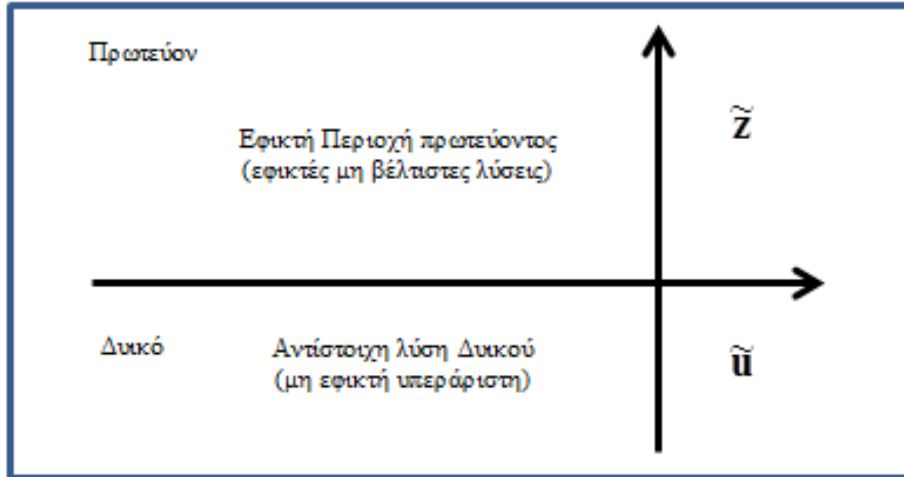
➤ Θεώρημα 7

Έστω w^*, x^* δύο εφικτές λύσεις του πρωτεύοντος και y^*, z^* του δυικού προβλήματος για τις οποίες ισχύει . Τότε οι λύσεις αυτές είναι αντίστοιχα βέλτιστες και για τα δύο προβλήματα.

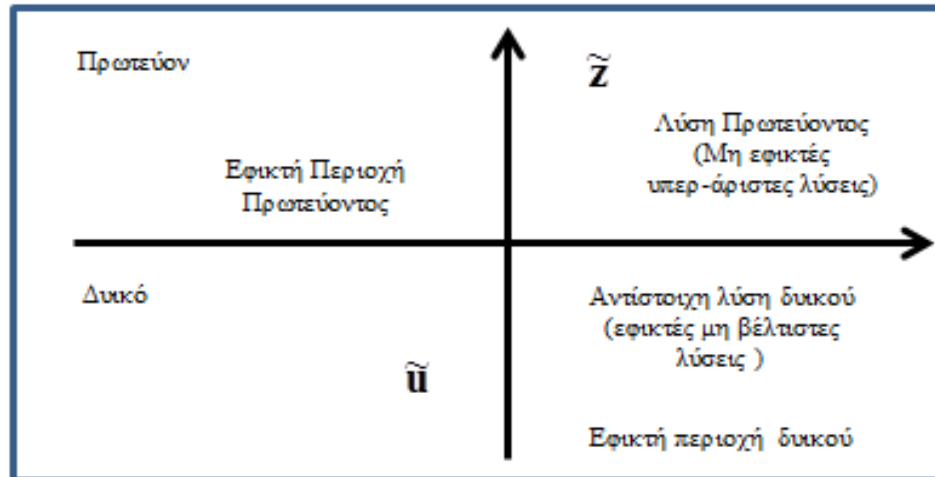


Γραφικά

Δυικός Αλγόριθμος Simplex



Αλγόριθμος Simplex



Παράδειγμα - I

- Εάν οι λύσεις του παρακάτω ΠΓΠ είναι $x = (1/5, 0, 21/5, 9/5)$ να βρεθεί η άριστη λύση του δικού του.

$$\max_{x_1, x_2, x_3, x_4} Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



Παράδειγμα - II

➤ Να λυθεί με την δυική μέθοδο Simplex το ΠΓΠ:

$$\max_{x_1, x_2} Z = 5x_1 - 4x_2$$

s.t.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_5 = -4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$



Συμπεράσματα - Ι

- Τα δύο προβλήματα το δυικό αλλά και το πρωτεύον ως ΠΓΠ μπορούν αν επιλυθούν με την μέθοδο Simplex.
- Μάλιστα επειδή στον τελικό πίνακα των λύσεων ενός ΠΓΠ περιέχεται και η λύση του άλλου προβλήματος συνηθίζεται να επιλύεται όποιο πρόβλημα φαίνεται να είναι λιγότερο απαιτητικό.
- Επιπρόσθετα, θα πρέπει να τονίσουμε το γεγονός ότι κάθε βήμα στην διαδικασία Simplex συνδέεται με ένα ανάλογο βήμα στην επίλυση του αντίστοιχου δυικού προβλήματος, δηλαδή επιφέρει και την λύση του άλλου στην δική του διάσταση.
- Κάθε σκιάδης τιμή του πρωτεύοντος είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με μια δυική μεταβλητή. Τα δύο ΠΓΠ συσχετίζονται μεταξύ τους μέσω του συνόλου των περιορισμών του πρωτεύοντος ΠΓΠ.



Συμπεράσματα - II

- Η γενική ιδέα της μεθόδου Simplex υποστηρίζει ότι αρχίζουμε με μία βασική λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ η οποία παρεμπιπτόντως αντιστοιχεί σε μια βασική μη εφικτή λύση του δυικού.
- Συνεπώς βελτιώνοντας σταδιακά την λύση αυτή και διατηρώντας την εφικτότητα στο πρωτεύον, φτάνουμε στη άριστη λύση του δυικού όταν επιτύχουμε την εφικτότητα της λύσης.
- Στην δυική μέθοδο Simplex αρχίζουμε με μια βασική μη εφικτή λύση του πρωτεύοντος ΠΓΠ (υπεράριστη λύση) και άρα η αντίστοιχη δυική είναι εφικτή. Η πρώτη βασική λύση εφικτή για το πρωτεύον είναι η άριστη του δυικού.
- Συνεπώς η δυική μέθοδος Simplex επιλύει το δυικό πρόβλημα πάνω στους πίνακες του πρωτεύοντος και η λύση περιλαμβάνει την μετακίνηση από μια βασική εφικτή λύση του δυικού σε μία καλύτερη βασική εφικτή λύση.



Τέλος 7^{ης} Ενότητας

Από το πρωτεύον στο δυικό ΠΓΠ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Από το πρωτεύον στο δυικό ΠΓΠ». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: [σύνδεσμο μαθήματος](#).



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

