Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα: Η Μέθοδος Μ και η Μέθοδος των Δύο Φάσεων

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής

Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ. Οικονομικής Επιστήμης

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

1. Σκοποί ενότητας

Βασικός σκοπός του παραδείγματος που αναπτύσσεται στην ενότητα αυτή είναι η αναλυτική παρουσίαση και χρήση της Μεθόδου M μέσω ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά ένα παράδειγμα χρήσης της Μεθόδου M με βάση τον αλγόριθμο Simplex.

3. Παρουσίαση της Μεθόδου Μ χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της μεθόδου Simplex.

Ας υποθέσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} Z = x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3 \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\
&0.4\cdot x_1 + 0.25\cdot x_2 + 0.2\cdot x_3 \geq 300 \\
&0.4\cdot x_1 + 0.2\cdot x_2 + 0.4\cdot x_3 \geq 400 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Να υπολογίσετε τις βέλτιστες ποσότητες των μεταβλητών καθώς και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Απάντηση:

Έχουμε ήδη αναφέρει πως σε περιορισμούς του τύπου "$\geq$" εισάγουμε πλεονασματικές μεταβλητές προκειμένου να μετατρέψουμε τον ανισοτικό περιορισμό σε ισοτικό. Στην περίπτωση που έχουμε ισοτικό περιορισμό εξ' αρχής δεν χρειάζεται να εισάγουμε μεταβλητές απόκλισης ή πλεονασματικές.

Επομένως, μετά την εισαγωγή των πλεονασματικών μεταβλητών, το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} Z = x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3 + 0\cdot S_2 + 0\cdot S_3 \\
&s.t. \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \\
&0.4\cdot x_1 + 0.25\cdot x_2 + 0.2\cdot x_3 - S_2 = 300 \\
&0.4\cdot x_1 + 0.2\cdot x_2 + 0.4\cdot x_3 - S_3 = 400 \\
&x_1, x_2, x_3, S_2, S_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Να σημειώσουμε σ' αυτό το σημείο πως σε περιορισμούς του τύπου "$\geq$", οι πλεονασματικές μεταβλητές εκφράζουν τις ποσότητες πέραν των ελαχίστων απαιτήσεων των περιορισμών.

Η αρχική λύση της μεθόδου Simplex είναι εκείνη που θα προκύψει εάν θέσουμε όλες τις μεταβλητές απόφασης ίσες με το μηδέν, δηλαδή $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, προκειμένου να ξεκινήσει τις επαναλήψεις ο αλγόριθμος Simplex. Παρατηρούμε όμως πως προκύπτουν τα παρακάτω τεχνικά προβλήματα:

$$\begin{aligned}
&0 = 1000 \rightarrow \text{Αδύνατο} \\
&S_2 = -300 \rightarrow \text{Μη αποδεκτό} \\
&S_3 = -400 \rightarrow \text{Μη αποδεκτό}
\end{aligned}$$

Σε περιπτώσεις όπως παραπάνω, κατά τις οποίες δηλαδή δεν προκύπτει μια αρχική βασική εφικτή λύση, χρησιμοποιούμε την Μέθοδο Μ και συγκεκριμένα εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές προκειμένου να σχηματίσουμε μοναδιαίο πίνακα και να ξεκινήσουν οι επαναλήψεις του αλγορίθμου.

Μπορούμε να εισάγουμε τόσες τεχνητές μεταβλητές όσες χρειάζονται ώστε να σχηματιστεί μοναδιαίος πίνακας ή μπορούμε να εισάγουμε τόσες τεχνητές μεταβλητές όσες και οι περιορισμοί του προβλήματος. Και στις δύο περιπτώσεις θα σχηματιστεί μοναδιαίος πίνακας με την διαφορά ότι στην δεύτερη περίπτωση θα χρειαστεί ένας πίνακας Simplex παραπάνω. Εδώ, θα εισάγουμε τόσες τεχνητές μεταβλητές όσες και οι περιορισμοί προκειμένου να παρουσιάσουμε την Μέθοδο Μ αναλυτικότερα. Επισημαίνεται, πως για την μελέτη του συγκεκριμένου παραδείγματος κρίνεται σκόπιμο να μελετηθούν οι διαφάνειες τις Ενότητας 6 (Μέθοδος Μ και Μέθοδος Δύο Φάσεων) ώστε να κατανοηθούν τα ζητήματα της θεωρίας.

Επίσης, υπενθυμίζεται πως η χρησιμότητα των τεχνητών μεταβλητών έγκειται στο να συμβάλλουν στην εκκίνηση του αλγορίθμου ώστε να ξεκινήσει να παράγει εφικτές λύσεις μέχρις ότου καταλήξει στην βέλτιστη.

Ως εκ τούτου, όπως έχει αναφερθεί και στην θεωρία, οι τεχνητές μεταβλητές δεν έχουν καμία φυσική ερμηνεία. Κάθε φορά λοιπόν που μια τεχνητή μεταβλητή εγκαταλείπει την βάση του πίνακα δεν συμμετέχει ξανά στους υπολογισμούς των πινάκων Simplex που ακολουθούν. Συνεπώς, οι τεχνητές μεταβλητές που σταδιακά εγκαταλείπουν την βάση του πίνακα, δεν επαναϋπολογίζονται. Το γεγονός αυτό θα γίνει περισσότερο σαφές από τους πίνακες που ακολουθούν.

Το αρχικό πρόβλημα έπειτα από την εισαγωγή πλεονασματικών και τεχνητών μεταβλητών, διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} Z = x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3 + 0\cdot S_2 + 0\cdot S_3 + \mathrm{M}\cdot \mathrm{A}_1 + \mathrm{M}\cdot \mathrm{A}_2 + \mathrm{M}\cdot \mathrm{A}_3\\
&s.t.\\
&x_1 + x_2 + x_3 + \mathrm{A}_1 = 1000\\
&0.4\cdot x_1 + 0.25\cdot x_2 + 0.2\cdot x_3 - S_2 + \mathrm{A}_2 = 300\\
&0.4\cdot x_1 + 0.2\cdot x_2 + 0.4\cdot x_3 - S_3 + \mathrm{A}_3 = 400\\
&x_1, x_2, x_3, S_2, S_3, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να ξεκινήσουμε να λύνουμε το πρόβλημα ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία, μηδενίζοντας δηλαδή τις μεταβλητές απόφασης, δηλαδή τις $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1 = 1000\\
&-S_2 + \mathrm{A}_2 = 300\\
&-S_3 + \mathrm{A}_3 = 400
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε όμως ότι το παραπάνω σύστημα δεν ταυτοποιείται και προκειμένου να πάρουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση, θα πρέπει να αρχίσουμε να μηδενίζουμε και κάποιες από τις πλεονασματικές (ή τις μεταβλητές απόκλισης, εξαρτάται από το πρόβλημα) μεταβλητές (πάντα μετά από τις μεταβλητές απόφασης) μέχρι ότου ταυτοποιηθεί το παραπάνω σύστημα. Για τον λόγο αυτό, θα χρειαστεί να μηδενίσουμε διαδοχικά την S_2 και στην συνέχεια την S_3 ώστε να έχουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Το αποτέλεσμα, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1):

Πίνακας 1: 1ος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	1	1	1	0	0	1	0	0	1000
M	A_2	0.4	0.25	0.2	-1	0	0	1	0	300
M	A_3	0.4	0.2	0.4	0	-1	0	0	1	400
	z_j	1.8M	1.45M	1.6M	-M	-M	M	M	M	
	$c_j - z_j$	1-1.8M	0.7-1.45M	0.8-1.6M	M	M	0	0	0	

Για να επιλέξουμε οδηγό στήλη, διαλέγουμε αυτή με τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή, εδώ το -1.8 ενώ για να επιλέξουμε οδηγό γραμμή ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως περιγράφεται και στο αρχείο «Μέθοδος_Simplex_αναλυτικό_παράδειγμα.pdf» στις Ενότητες 4 και 5 (Μέθοδος Simplex), διαλέγοντας και σε αυτή την περίπτωση την μεταβλητή με την ελάχιστη τιμή καθώς έτσι ικανοποιούνται ταυτόχρονα όλοι οι περιορισμοί του ΠΓΠ. Προφανώς, και εδώ, το σημείο τομής της οδηγού στήλης και της οδηγού γραμμής, αντιπροσωπεύει το οδηγό στοιχείο.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε πως στα προβλήματα ελαχιστοποίησης επιλέγουμε την μεταβλητή με τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή M καθώς η επιλογή αυτής της μεταβλητής θα έχει ως αποτέλεσμα την μεγαλύτερη μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης (π.χ. την μείωση του κόστους).

Έπειτα από τους απαραίτητους υπολογισμούς[1], δεύτερος πίνακας Simplex φαίνεται παρακάτω (Πίνακας 2):

Πίνακας 2: 2ος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	0	0.375	0.5	2.5	0	1		0	250
1	x_1	1	0.625	0.5	-2.5	0	0		0	750
M	A_3	0	-0.05	0.2	1	-1	0		1	100
	z_j	1	0.625+0.325M	0.5+0.7M	-2.5+3.5M	-M	M		M	
	$c_j - z_j$	0	0.075-0.325M	0.3-0.7M	2.5-3.5M	M	0		0	

Επιλέγουμε ξανά οδηγό στήλη βάσει του μεγαλύτερου αρνητικού συντελεστή M και οδηγό γραμμή βάσει του πηλίκου της διαθέσιμης ποσότητας προς την τιμή της κάθε βασικής μεταβλητής στην οδηγό στήλη.

Εδώ, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή x_1 έχει αρνητική τιμή. Στην περίπτωση που η τιμή κάποιας βασικής μεταβλητής είναι αρνητική στην οδηγό στήλη, δεν τις λαμβάνουμε υπόψη μας στην διαδικασία επιλογής της βασικής μεταβλητής που θα αντικατασταθεί στην βάση. Η ερμηνεία βασίζεται στους συντελεστές μετατροπής διότι η τιμή της οδηγού στήλης (δηλαδή ο συντελεστής μετατροπής) είναι αρνητικός, κάθε αύξηση στην μεταβλητή που έχει επιλεγεί ώστε να πάρει την θέση κάποιας βασικής μεταβλητής, αυξάνει με την σειρά της την τιμή της βασικής μεταβλητής (εδώ της x_1). Επομένως, δεν τίθεται ζήτημα άνω ορίου στην τιμή που είναι δυνατό να πάρει η μεταβλητή που εισέρχεται στην βάση του πίνακα. Επίσης, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στην περίπτωση που δύο ή περισσότερα πηλίκα είναι ίσα, τότε επιλέγουμε αυθαίρετα κάποια μεταβλητή. Η μεταβλητή που δεν επιλέξουμε, θα είναι η επόμενη μεταβλητή που θα επιλεγεί να εισέλθει στην βάση του επόμενου πίνακα Simplex.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, μπορούμε να κατασκευάσουμε και τους επόμενους πίνακες Simplex (Πίνακες 3,4 και 5) μέχρι ότου καταλήξουμε στον τελικό πίνακα Simplex (Πίνακας 6) στον οποίο η τελευταία γραμμή περιλαμβάνει μόνο μηδενικές και θετικές τιμές, εφόσον έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Παρατηρήστε επίσης πως από τον Πινάκα 2 μέχρι τον Πίνακα 5, οι τεχνητές μεταβλητές εγκαταλείπουν σταδιακά την βάση του πίνακα (όχι όμως απαραίτητα και με την σειρά) και δεν υπολογίζονται στους επόμενους πίνακες μέχρις ότου εξαφανιστούν από την βάση και όπως φαίνεται και στον Πίνακα 6. Στο τέλος, δεν εμφανίζονται πουθενά κάτι το οποίο είναι απόλυτα λογικό καθώς οι τεχνητές μεταβλητές είναι ένα τέχνασμα ώστε να ξεκινήσει τις επαναλήψεις ο αλγόριθμος Simplex.

[1] Για αναλυτική παρουσίαση των υπολογισμών, συμβουλευτείτε το αρχείο Μέθοδος_Simplex_αναλυτικό_παράδειγμα.

Οι υπόλοιποι πίνακες του προβλήματος φαίνονται παρακάτω:

Πίνακας 3: 3ος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
M	A_1	0	0.5	0	0	2.5	1			0
1	x_1	1	0.5	1	0	-2.5	0			1000
0	S_2	0	-0.05	0.2	1	-1	0			100
	z_j	1	0.5-0.5M	1	0	-2.5+2.5M	M			
	$c_j - z_j$	0	0.2+0.5M	-0.2	0	2.5-2.5M	0			

Πίνακας 4: 4ος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
0	S_3	0	0.2	0	0	1				0
1	x_1	1	1	1	0	0				1000
0	S_2	0	0.15	0.2	1	0				100
	z_j	1	1	1	0	0				
	$c_j - z_j$	0	-0.3	-0.2	0	0				

Πίνακας 5: 5ος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
0.7	x_2	0	1	0	0	5				0
1	x_1	1	0	1	0	-5				1000
0	S_2	0	0	0.2	1	-0.75				100
	z_j	1	0.7	1	0	-1.5				
	$c_j - z_j$	0	0	-0.2	0	1.5				

Πίνακας 6: Τελικός πίνακας Simplex

Συντελεστές Κόστους, c_j		**1**	**0.7**	**0.8**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	x_3	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	
0.7	x_2	0	1	0	0	5				0
1	x_1	1	0	0	-5	-1,25				500
0,8	x_3	0	0	1	5	-3.75				500
	z_j	1	0.7	0,8	-1	-0.75				
	$c_j - z_j$	0	0	0	1	0.75				

Όπως φαίνεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 900 μονάδες και οι βέλτιστες ποσότητες είναι $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.