Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα: Η Μέθοδος Simplex – Παρουσίαση της μεθόδου

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής

Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

1. Σκοποί ενότητας

Βασικός σκοπός του παραδείγματος που αναπτύσσεται στην ενότητα αυτή είναι η αναλυτική παρουσίαση και χρήση της Μεθόδου Simplex μέσω ενός προβλήματος μεγιστοποίησης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά ένα παράδειγμα χρήσης της Μεθόδου Simplex και τον τρόπο εύρεσης της βέλτιστης κορυφής μέσω του υπολογισμού διαδοχικών πινάκων Simplex.

3. Παρουσίαση της μεθόδου Simplex για την εύρεση της βέλτιστης κορυφής.

Έστω μια κάθετα ολοκληρωμένη βιομηχανία αυτοκινήτων και μοτοσυκλετών των οποίων η παραγωγή χρησιμοποιεί πόρους από το τμήμα σχεδιασμού, το τμήμα συναρμολόγησης και το τμήμα ποιοτικού ελέγχου. Η παραγωγή είναι κατά κύριο λόγο αυτοματοποιημένη με τον ανθρώπινο παράγοντα να επεμβαίνει κυρίως στο στάδιο του σχεδιασμού. Προκειμένου να σχεδιαστεί ένα αυτοκίνητο απαιτούνται 8 ώρες στο τμήμα σχεδιασμού, 4 ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης και 4 ώρες στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου ενώ προκειμένου να κατασκευαστεί μία μοτοσυκλέτα απαιτούνται επίσης 8 ώρες στο τμήμα σχεδιασμού, 2 ώρες στο τμήμα συναρμολόγησης και 3 ώρες στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου. Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο τμήμα σχεδιασμού είναι 960, στο τμήμα συναρμολόγησης είναι 400 ενώ στο τμήμα ποιοτικού ελέγχου οι προς διάθεση ώρες είναι 420. Η τιμή πώλησης του κάθε αυτοκινήτου είναι €15,000 ενώ η τιμή πώλησης της κάθε μηχανής είναι €9,500 και ο αντικειμενικός σκοπός της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση των μικτών κερδών από την παραγωγή των αυτοκινήτων και των μοτοσικλετών. Οι παραπάνω διαθέσιμες ώρες στο κάθε τμήμα αφορούν τον μέγιστο αριθμό που μπορεί η επιχείρηση να διαθέσει.

Στο συμβούλιο συμμετέχουν μέτοχοι και διευθυντικά στελέχη. Κάποιος από τους μετόχους διατύπωσε την άποψη πως η διοίκηση της εταιρίας θα πρέπει να δαπανήσει πόρους στην πρόσληψη περισσότερων ειδικών στο τμήμα σχεδιασμού ώστε να διαφοροποιηθεί από τον ανταγωνισμό μέσω του πιο εξελιγμένου σχεδιασμού, κάτι το οποίο θα αυξήσει τα κέρδη της μέσω της διαφοροποίησης, ενώ ταυτόχρονα θα πρέπει να ενισχύσει το τμήμα συναρμολόγησης με περισσότερο εξελιγμένες μηχανές συναρμολόγησης προκειμένου να εναρμονιστούν με το τμήμα σχεδιασμού. Ο οικονομικός διευθυντής της επιχείρησης διαφώνησε με την άποψη αυτή και υποστήριξε πως το καλύτερο για την εταιρεία θα ήταν να επενδύσει στον ποιοτικότερο έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων προκειμένου να αυξηθούν τα κέρδη της εταιρείας και επίσης υποστήριξε πως δεν χρειάζεται να δαπανηθούν περαιτέρω πόροι στο τμήμα σχεδιασμού καθώς ήδη το τμήμα αυτό φαίνεται να εμφανίζει αργούν παραγωγικό δυναμικό. Με ποια από τις δυο απόψεις συμφωνείτε και για ποιον λόγο/ους;

Τα στοιχεία του προβλήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ποσότητα παραγόμενων αυτοκινήτων	x_1
Ποσότητα παραγόμενων μοτοσυκλετών	x_2
Περιορισμός Τμήματος Σχεδιασμού	$8 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \leq 960$
Περιορισμός Τμήματος Συναρμολόγησης	$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 400$
Περιορισμός Τμήματος Ποιοτικού ελέγχου	$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 420$
Περιορισμοί μη-αρνητικότητας	$x_1, x_2 \geq 0$
Αντικειμενική συνάρτηση	$\max_{x_1, x_2} \Pi = 15000 \cdot x_1 + 9500 \cdot x_2$

ενώ αντικειμενικός στόχος της επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους που προκύπτει από την παραγωγή αυτοκινήτων και μοτοσυκλετών.

Για να λύσουμε το πρόβλημα με την Μέθοδο Simplex θα πρέπει να εκφράσουμε το σύνολο των περιορισμών σε ισότητες. Κάτι τέτοιο θα μας εξασφαλίσει μια αρχική βασική εφικτή λύση προκειμένου να ξεκινήσει ο αλγόριθμος Simplex τις επαναλήψεις ώστε να καταλήξει στην βέλτιστη βασική εφικτή λύση. Παρατηρούμε πως όλοι οι περιορισμοί είναι του τύπου "$\leq$", και γι' αυτόν τον λόγο θα χρειαστεί να εισάγουμε περιθώριες μεταβλητές (slack variables) σε όλους τους περιορισμούς.

Έτσι λοιπόν ορίζουμε:

S_1	**Ώρες στο Τμήμα Σχεδιασμού που ΔΕΝ χρησιμοποιούνται**
S_2	**Ώρες στο Τμήμα Συναρμολόγησης που ΔΕΝ χρησιμοποιούνται**
S_3	**Ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου που ΔΕΝ χρησιμοποιούνται**

Είναι προφανές πως φυσική ερμηνεία της ποσότητας των slack variables, είναι πως εκφράζει την διαφορά μεταξύ των διαθέσιμων και απαιτούμενων ποσοτήτων των πόρων που έχει η επιχείρηση στην διάθεση της. Πρέπει σε αυτό το σημείο να υπογραμμίσουμε πως κάθε slack variable αναφέρεται σε έναν μόνο περιορισμό του προβλήματος του γραμμικού προγραμματισμού.

Με βάση τα παραπάνω, οι περιορισμοί του προβλήματος μετά την εισαγωγή των slack variables, διαμορφώνονται ως εξής:

Περιορισμός Τμήματος Σχεδιασμού	$8 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 1 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3 = 960$
Περιορισμός Τμήματος Συναρμολόγησης	$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0 \cdot S_1 + 1 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3 = 400$
Περιορισμός Τμήματος Ποιοτικού ελέγχου	$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 1 \cdot S_3 = 420$

Εφόσον όμως οι slack variables αναφέρονται σε ποσότητα πόρων που δεν χρησιμοποιούνται, η συνεισφορά τους στο κέρδος, δηλαδή στην αντικειμενική συνάρτηση, δεν μπορεί παρά να είναι μηδενική. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Αντικειμενική συνάρτηση	$\max_{x_1, x_2} \Pi = 15000 \cdot x_1 + 9500 \cdot x_2 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3$

Μετά την εισαγωγή των slack variables, οι περιορισμοί αρνητικότητας διαμορφώνονται ως εξής:

Περιορισμοί μη-αρνητικότητας	$x_1, x_2 \geq 0 \ \& \ S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Ως εκ τούτου, έχουμε ένα γραμμικό σύστημα πέντε (5) μεταβλητών και τριών (3) εξισώσεων. Εφόσον ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των μεταβλητών έχουμε απειρία λύσεων.

Εφόσον εκφράσαμε όλους τους περιορισμούς σε ισότητες, το επόμενο βήμα είναι να σχηματίσουμε τον πρώτο πίνακα Simplex και να πάρουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Για να σχηματίσουμε τον πρώτο πίνακα Simplex, θα μηδενίζουμε πάντα τις ποσότητες των μεταβλητών απόφασης και αυτό συνεπάγεται πως το σύνολο των διαθέσιμων ποσοτήτων των πόρων δεν θα χρησιμοποιείται και σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι μηδέν. Πιο συγκεκριμένα, από τους περιορισμούς θα έχουμε για $x_1 = x_2 = 0$:

Περιορισμός Τμήματος Σχεδιασμού	$S_1 = 960$
Περιορισμός Τμήματος Συναρμολόγησης	$S_2 = 400$
Περιορισμός Τμήματος Ποιοτικού ελέγχου	$S_3 = 420$

Επίσης θα πρέπει να αναφέρουμε πως ο αρχικός πίνακας Simplex (Πίνακας 1) θα περιλαμβάνει τόσο βασικές μεταβλητές (οι τιμές των οποίων θα είναι μη-μηδενικές) οι οποίες θα αποτελέσουν και την βάση της λύσης όσο και μη-βασικές (οι τιμές των οποίων θα είναι μηδενικές) μεταβλητές.

Παρακάτω περιγράφεται ο σχηματισμός και το περιεχόμενο του πρώτου πίνακα Simplex αναλυτικά. Η μορφή του πίνακα Simplex φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1: 1ος πίνακας Simplex: Συντελεστές Κέρδους

	Συντελεστές Κέρδους, c_j	**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	15000	9500	0	0	0	

Οι συντελεστές κέρδους προκύπτουν από την αντικειμενική συνάρτηση και αναφέρονται στην μεικτή αύξηση του κέρδους όταν μεταβάλλεται η ποσότητα των μεταβλητών απόφασης οριακά (κατά μία μονάδα). Δηλαδή, αναφέρεται στο κατά πόσο συνεισφέρει στα (μεικτά) κέρδη η πώληση ενός επιπρόσθετου αυτοκινήτου και μιας επιπρόσθετης μοτοσυκλέτας.

Στην συνέχεια, ο πίνακας 2 παρουσιάζει το **Κυρίως Τμήμα** του πίνακα Simplex. Τα στοιχεία στο κυρίως τμήμα του πίνακα Simplex –στοιχεία στηλών- ή αλλιώς οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης καθώς και οι συντελεστές των slack variables ονομάζονται "**Συντελεστές Μετατροπής**" ή "**Τεχνολογικοί Συντελεστές**" και εκφράζουν την σχέση μετατροπής (ή ανταλλαγής) μεταξύ της κάθε μεταβλητής και των βασικών μεταβλητών του πίνακα Simplex και η ερμηνεία τους είναι η ακόλουθη: Για να αυξηθεί κατά μία επιπλέον μονάδα (οριακά) η (μη-βασική) μεταβλητή x_1, τότε θα πρέπει να μειωθούν οι τιμές των βασικών μεταβλητών (εδώ, θα πρέπει να μειωθούν οι αχρησιμοποίητες ώρες εργασίας στο κάθε τμήμα της επιχείρησης) S_1**,** S_2 και S_3 κατά 8, 4 και 4 μονάδες αντίστοιχα. Πρακτικά αυτό σημαίνει πως θα να αυξηθεί η ποσότητα της μεταβλητής x_1, θα πρέπει να ξεκινήσει η παραγωγή και ως εκ τούτου να μειωθούν οι αχρησιμοποίητες ώρες λειτουργίας του κάθε τμήματος.

Πίνακας 2: 1ος πίνακας Simplex: Κυρίως τμήμα του πίνακα Simplex

	Συντελεστές Κέρδους, c_j	**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	**8**	**8**	1	0	0	960
0	S_2	**4**	**2**	0	1	0	400
0	S_3	**4**	**3**	0	0	1	420
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	15000	9500	0	0	0	

Έπειτα, η τελευταία στήλη του πίνακα 1, αναφέρεται στην ποσότητα των βασικών μεταβλητών του προβλήματος. Εδώ, αναφέρεται στις αχρησιμοποίητες ποσότητες των ωρών εργασίας στο κάθε τμήμα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3):

Πίνακας 3: 1ος πίνακας Simplex: Διαθέσιμες Ποσότητες

Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	8	1	0	0	**960**
0	S_2	4	2	0	1	0	**400**
0	S_3	4	3	0	0	1	**420**
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	15000	9500	0	0	0	

Η γραμμή z_j, αναφέρεται στην μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης (εδώ στην μείωση των κερδών) αν αυξηθεί κατά μία μονάδα. Τα slack variables δεν έχουν επίπτωση στην αντικειμενική συνάρτηση καθώς οι συντελεστές κέρδους είναι μηδέν.

Πίνακας 4: Η γραμμή z_j

Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	8	1	0	0	**960**
0	S_2	4	2	0	1	0	**400**
0	S_3	4	3	0	0	1	**420**
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	**15000**	**9500**	0	0	0	

Τέλος, η τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex αναφέρεται στο κριτήριο βελτιστότητας της λύσης, καθορίζει δηλαδή κατά πόσο η λύση που παρουσιάζει ο πίνακας Simplex είναι ή όχι βέλτιστη. Αρνητικές τιμές σημαίνουν πως αν αυξηθεί η x_1 κατά μία μονάδα, τότε θα μειωθούν τα κέρδη κατά όσο φαίνεται στο κελί ενώ θετικές τιμές (όπως σ' αυτή την περίπτωση) σημαίνουν πως μπορεί να υπάρξει βελτίωση στην αντικειμενική συνάρτηση (εδώ στα κέρδη) αν αυξηθεί μια μεταβλητή (στήλη) με θετική τιμή στην τελευταία στήλη. Επίσης, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας πως για προβλήματα μεγιστοποίησης, η γραμμή $c_j - z_j$ θα πρέπει να περιλαμβάνει αρνητικές και μηδενικές τιμές ενώ για προβλήματα ελαχιστοποίησης θα πρέπει να περιλαμβάνει θετικές και μηδενικές τιμές. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μεγιστοποίησης, βλέπουμε πως στην τελευταία στήλη έχουμε θετικές και μηδενικές και ως εκ τούτου η λύση που έχουμε βρει δεν είναι βέλτιστη και θα πρέπει να ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο Simplex ώστε να καταλήξουμε στην βέλτιστη λύση.

Πίνακας 5: Η γραμμή $c_j - z_j$ **(κριτήριο βελτιστότητας)**

Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	8	1	0	0	**960**
0	S_2	4	2	0	1	0	**400**
0	S_3	4	3	0	0	1	**420**
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	15000	9500	0	0	0	

Μετά τον σχηματισμό του πρώτου πίνακα Simplex, θα πρέπει να κοιτάξουμε την τελευταία γραμμή του πίνακα ώστε να αποφασίσουμε αν η λύση είναι βέλτιστη ή όχι. Στην συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχουν θετικές και μηδενικές τιμές και συμπεραίνουμε πως η λύση που έχουμε δεν είναι βέλτιστη. Για να καταλήξουμε στην βέλτιστη εφικτή βασική λύση θα πρέπει να επαναλάβουμε τα ακόλουθα βήματα:

1. Επιλέγουμε μια νέα βασική μεταβλητή για να σχηματίσουμε τον επόμενο πίνακα Simplex (και να μετακινηθούμε σε ένα νέο γειτονικό σημείο της εφικτής περιοχής) και αντικαθιστώ την μεταβλητή που επέλεξα με μια μη-βασική.

Για να επιλέξουμε την μη-βασική μεταβλητή που θα εισέλθει στην βάση του επόμενου πίνακα Simplex χρησιμοποιούμε την γραμμή $c_j - z_j$ και συγκεκριμένα διαλέγουμε την μεταβλητή με την μεγαλύτερη τιμή, διότι αυτή η μεταβλητή θα συνεισφέρει περισσότερο στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (κέρδη). Η στήλη που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ποσότητα ονομάζεται **Οδηγός Στήλη**. Εδώ η οδηγός στήλη είναι αυτή που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1.

2. Έπειτα επιλέγουμε την βασική μεταβλητή που θα αντικατασταθεί διαιρώντας την στήλη των ποσοτήτων με τα αντίστοιχα σημεία της οδηγού στήλης x_1. Η μεταβλητή με την ελάχιστη τιμή του λόγου ποσότητα/στοιχείο στην οδηγό στήλη. Δηλαδή,

$$S_1 = \frac{960}{8} = 120$$

$$S_2 = \frac{400}{4} = 100$$

$$S_3 = \frac{420}{4} = 105$$

Επιλέγουμε το ελάχιστο από τους τρεις λόγους. Η S_2 θα αντικατασταθεί από την x_1. Η S_2 ονομάζεται **Οδηγός Στήλη**. Η οικονομική ερμηνεία της επιλογής του στοιχείου, δηλαδή της επιλογής της μεταβλητής που θα εισέλθει στην βάση είναι η εξής:

Προκειμένου να αυξηθεί η x_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να μειωθεί η S_1 κατά 8 μονάδες, η S_2 κατά 4 μονάδες και η S_3 κατά 4 μονάδες. Όμως:

- $S_1 = 960$ και επομένως η μέγιστη ποσότητα παραγωγής της x_1 δεδομένων των περιορισμών είναι $x_1 = \frac{960}{8} = 120$
- $S_2 = 400$ και επομένως η μέγιστη ποσότητα παραγωγής της x_1 δεδομένων των περιορισμών είναι $x_1 = \frac{400}{4} = 100$
- $S_3 = 420$ και επομένως η μέγιστη ποσότητα παραγωγής της x_1 δεδομένων των περιορισμών είναι $x_1 = \frac{420}{4} = 105$

Παρατηρούμε πως η μεγαλύτερη ποσότητα της x_1 που μπορεί να παραχθεί, δεδομένων **των περιορισμών, που πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα,** είναι 100 μονάδες, κάτι που επιτυγχάνεται όταν $S_2 = 0$**,** δηλαδή όταν χρησιμοποιούνται όλες οι διαθέσιμες ώρες στο Τμήμα Συναρμολόγησης. Άρα η S_2 από βασική γίνεται μη-βασική μεταβλητή και αντικαθίσταται.

Ο πίνακας Simplex παίρνει την εξής μορφή:

Πίνακας 6: Οδηγός Στήλη, οδηγός γραμμή, οδηγό στοιχείο

Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	8	8	1	0	0	**960**
0	S_2	4	2	0	1	0	**400**
0	S_3	4	3	0	0	1	**420**
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	15000	9500	0	0	0	

Προκειμένου να μεταβούμε στον επόμενο πίνακα Simplex (επόμενο γειτονικό γωνιακό σημείο επί της εφικτής περιοχής), διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού γραμμής με το οδηγό στοιχείο, το οποίο βρίσκεται στην τομή της οδηγού στήλης και οδηγού γραμμής, ώστε να προκύψουν οι τιμές των στοιχείων της νέας οδηγού γραμμής, εδώ της x_1:

15000	x_1	$4/4=1$	$2/4=1/2$	$0/4=0$	$1/4$	$0/4=0$	$400/4=100$

Επίσης, θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις τιμές των υπόλοιπων βασικών μεταβλητών έπειτα από την αλλαγή στην βάση του πίνακα. Υπολογίζουμε κάθε μεταβλητή ξεχωριστά ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

S_1	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Προηγούμενες τιμές S_1	**8**	**8**	**1**	**0**	**0**	**960**
Στοιχείο σειράς S_1 **στην οδηγό στήλη** x_1	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**	**8**
Τιμές νέας οδηγού σειράς x_1	**1**	**1/2**	**0**	**1/4**	**0**	**100**
	8-8*1	**8-8*(1/2)**	**1-8*0**	**0-8*(1/4)**	**0-8*0**	**960-8*100**
Νέες τιμές S_1	**0**	**4**	**1**	**-2**	**0**	**160**

S_3	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Προηγούμενες τιμές S_3	**4**	**3**	**0**	**0**	**1**	**420**
Στοιχείο σειράς S_1 **στην οδηγό στήλη** x_1	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
Τιμές νέας οδηγού σειράς x_1	**1**	**1/2**	**0**	**1/4**	**0**	**100**
	4-4*1	**3-4*(1/2)**	**0-4*0**	**0-4*(1/4)**	**1-4*0**	**420-4 *100**
Νέες τιμές S_3	**0**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**20**

Εφόσον υπολογίσαμε τις νέα τιμές για τις μεταβλητές που θα αποτελέσουν την βάση του πίνακα Simplex, το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των γραμμών z_j και $c_j - z_j$ αντίστοιχα.

Να θυμίσουμε πως οι τιμές της σειράς z_j αντιστοιχούν στην μείωση που θα προκύψει στο κέρδος αν επιλέξουμε να συμπεριλάβουμε στην βάση μία εκ των μη-βασικών μεταβλητών. Προκειμένου να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς z_j, πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής της κάθε μεταβλητής (δηλαδή αυτές στις στήλες του πίνακα) με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους (ή κόστους ανάλογα με το πρόβλημα βελτιστοποίησης) των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε. Σχετικά με την τελευταία γραμμή (δηλαδή το κριτήριο βελτιστότητας), υπολογίζουμε τις διαφορές μεταξύ των συντελεστών κέρδους των μεταβλητών όπως φαίνονται στην πρώτη γραμμή του πίνακα Simplex και των τιμών της γραμμής z_j που υπολογίσαμε νωρίτερα. Η διαδικασία παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω:

Συντελεστές Κέρδους, c_j	15000	9500	0	0	0
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3
z_j	$0 \cdot 0$	$4 \cdot 0$	$1 \cdot 0$	$-2 \cdot 0$	$0 \cdot 0$
	$+1 \cdot 15000$	$+(1/2) \cdot 15000$	$+0 \cdot 15000$	$+(1/4) \cdot 15000$	$+0 \cdot 15000$
	$0 \cdot 0$	$1 \cdot 0$	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 0$	$1 \cdot 0$
	15000	7500	0	3750	0
$c_j - z_j$	0	2000	0	-3750	0

Έπειτα από τους απαραίτητους υπολογισμούς, ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι ο εξής:

Πίνακας 7: Ο δεύτερος πίνακας Simplex

Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	4	1	-2	0	**160**
15000	x_1	1	1/2	0	1/4	0	**100**
0	S_3	0	1	0	-1	1	**20**
	z_j	140	70	0	35	0	
	$c_j - z_j$	0	2000	0	-3750	0	

Η νέα λύση που προέκυψε είναι $x_1 = 100, x_2 = 0, S_1 = 160, S_2 = 0, S_3 = 20$, δηλαδή θα παραχθούν 100 αυτοκίνητα, 0 μοτοσυκλέτες, θα υπάρχουν 160 αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Σχεδιασμού, 0 αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Συναρμολόγησης και 20 αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου.

Ας υποθέσουμε όμως πως η επιχείρηση επιθυμεί να παράξει και μοτοσυκλέτες, δηλαδή η ποσότητα των μοτοσυκλετών να είναι διάφορη του μηδενός ($x_2 \neq 0$). Τότε θα πρέπει η μεταβλητή x_2 να γίνει εισέλθει στην βάση του πίνακα και για να συμβεί αυτό θα πρέπει κάποια από τις x_1, S_1, S_3 να βγει από την βάση. Σε αυτό το σημείο να αναφέρουμε πως κάθε πίνακας Simplex και σε οποιαδήποτε επανάληψη του αλγορίθμου (δηλαδή σε όποιο γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής και να βρισκόμαστε), μας δίνει πληροφορίες για τις σχέσεις μετατροπής των μεταβλητών μέσω των συντελεστών μετατροπής. Παραδείγματος χάρη, αν αυξηθεί η ποσότητα των μοτοσυκλετών κατά 1 μονάδα, τότε θα πρέπει **να μειωθούν** οι αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Σχεδιασμού κατά 4, να **μειωθεί** η ποσότητα των παραγόμενων αυτοκινήτων κατά ½ (σε αυτή την περίπτωση, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να συμβεί εφόσον η ποσότητα των αυτοκινήτων που παράγονται είναι διακριτή, το νόημα ωστόσο είναι πως για να αρχίσουν να παράγονται μοτοσυκλέτες θα πρέπει να μειωθεί η παραγωγή των αυτοκινήτων κατά ένα ποσό) καθώς επίσης και να **μειωθούν** οι αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου κατά 1.

Παρατηρούμε λοιπόν πως ο πίνακας Simplex, παρέχει μεγάλη ποσότητα πληροφοριών σχετικά με τις σχέσεις μετατροπής των μεταβλητών που συμμετέχουν στην αντικειμενική συνάρτηση αλλά μας δείχνει πως μια οριακή μεταβολή σε κάποια μεταβλητή του προβλήματος διαχέεται σε ολόκληρο το μαθηματικό υπόδειγμα και αυτό συμβαίνει μέσω του καναλιού που λέγεται σύνολο περιορισμών.

Πρέπει να υπογραμμίσουμε την σημασία των περιορισμών σε κάθε πρόβλημα γραμμικού (και όχι μόνο) προγραμματισμού τόσο στην ερμηνεία όσο και στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Το επόμενο βήμα στην διαδικασία επίλυσης είναι να κοιτάξουμε την τελευταία γραμμή του Πίνακα 7 παραπάνω και αν διαπιστώσουμε αν πρόκειται για τον τελικό πίνακα Simplex του προβλήματος μας. Δεδομένου του γεγονότος πως έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης, θα πρέπει η τελευταία γραμμή να περιλαμβάνει μηδενικές και αρνητικές τιμές. Κάτι τέτοιο όμως δεν παρατηρείται και θα πρέπει ο αλγόριθμος Simplex να κάνει μια ακόμη επανάληψη ώστε να μετακινηθεί σε επόμενο γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής.

Ακολουθώντας την συλλογιστική που παρουσιάστηκε αναλυτικά παραπάνω[1] και ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα (κάθε φορά) μεταβαίνουμε στον επόμενο πίνακα Simplex:

1. Κοιτάμε τις τιμές που περιλαμβάνονται στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Αν έχει μηδενικές και αρνητικές (για προβλήματα μεγιστοποίησης) τιμές μόνο τότε ο πίνακας αυτός είναι ο τελικός. Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω.
2. Εφόσον δεν περιλαμβάνονται μηδενικές και αρνητικές τιμές μόνο, διαλέγουμε την μεγαλύτερη θετική ποσότητα (διότι αυτή η μεταβλητή μπορεί να συμβάλλει περισσότερο στην αύξηση των κερδών) για να αποτελέσει την νέα οδηγό στήλη.
3. Επιλέγω ποια μεταβλητή θα βγει από την βάση υπολογίζοντας τα πηλίκα όπως παραπάνω επιλέγοντας το μικρότερο.
4. Εντοπίζω το οδηγό στοιχείο και υπολογίζω τόσο τις τιμές της νέας οδηγού γραμμής όσο και των υπολοίπων μεταβλητών του πίνακα με τον τρόπο που παρουσιάστηκε παραπάνω.

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα, τόσο οι τιμές της νέας οδηγού γραμμής όσο και των άλλων μεταβλητών του τρίτου πίνακα φαίνεται παρακάτω:

9500	x_2	$0/1=0$	$1/1=1$	0	-1	$0/4=0$	20

S_1	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$\boldsymbol{b_i}$
Προηγούμενες τιμές S_1	**0**	**4**	**1**	**-2**	**0**	**160**
Στοιχείο σειράς x_2 **στην οδηγό στήλη** x_2	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
Τιμές νέας οδηγού σειράς x_2	**0**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**20**
Νέες τιμές S_1	**0-4*0** **0**	**4-4*1** **0**	**1-4*1** **1**	**-2-4*1** **2**	**0-4*1** **-4**	**160-4*20** **80**

[1] Προκειμένου να αποφύγουμε το ενδεχόμενο να κουράσουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, δεν θα επαναλάβουμε την περιγραφή σε πλήρη έκταση.

x_1	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_i
Προηγούμενες τιμές x_1	**1**	**1/2**	**0**	**1/4**	**0**	**100**
Στοιχείο σειράς x_1 **στην οδηγό στήλη** x_2	**1/2**	**1/2**	**1/2**	**1/2**	**1/2**	**1/2**
Τιμές νέας οδηγού σειράς x_2	**0**	**1**	**0**	**-1**	**1**	**20**
	1-(1/2)*0	**(1/2)- (1/2)*1**	**0-(1/2)*0**	**(1/4)-(1/2)*1**	**0-(1/2)*1**	**100-(1/2)*20**
Νέες τιμές S_1	**1**	**0**	**0**	**3/4**	**1/2**	**90**

Επομένως, ο τρίτος πίνακας Simplex γίνεται:

Πίνακας 8: Τελικός πίνακας Simplex

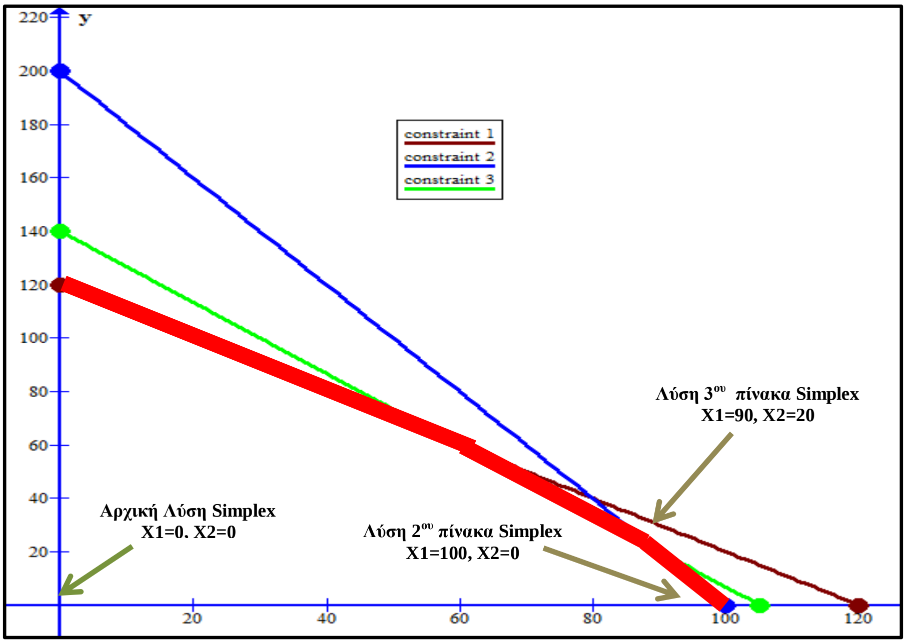
Συντελεστές Κέρδους, c_j		**15000**	**9500**	**0**	**0**	**0**	b_i
	Βασικές Μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	1	2	-4	**80**
15000	x_1	1	0	0	3/4	-1/2	**90**
9500	x_2	0	1	0	-1	1	**20**
	z_j	15000	9500	0	5	30	
	$c_j - z_j$	0	0	0	-1750	-2000	

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν παρά μόνο μηδενικές και αρνητικές τιμές και ως εκ τούτου ο πίνακας αυτός είναι και ο τελικός πίνακας σύμφωνα με τον οποίο η βέλτιστη εφικτή λύση είναι η παραγωγή 90 αυτοκινήτων, 20 μοτοσυκλετών, υπάρχουν 80 αχρησιμοποίητες ώρες στο Τμήμα Σχεδιασμού ενώ οι διαθέσιμες ώρες στα Τμήματα Συναρμολόγησης και Ποιοτικού ελέγχου εξαντλούνται. Ο συνδυασμός αυτός δίνει στην επιχείρηση €1,540,000 κέρδος.

Ας δούμε όμως συγκεντρωτικά το αποτέλεσμα των επαναλήψεων του αλγορίθμου Simplex:

1ος Πίνακας Simplex	**2ος Πίνακας Simplex**	**3ος Πίνακας Simplex**
$x_1 = 0$	$x_1 = 100$	$x_1 = 90$
$x_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x_2 = 20$
$S_1 = 960$	$S_1 = 160$	$S_1 = 80$
$S_2 = 400$	$S_2 = 0$	$S_2 = 0$
$S_3 = 420$	$S_3 = 20$	$S_3 = 0$
$\Pi = 0$	$\Pi = 1500000$	$\Pi = 1540000$

Ενώ χρησιμοποιώντας το **Graph**, οι επαναλήψεις του αλγορίθμου της Μεθόδου Simplex φαίνονται παρακάτω:



Γράφημα 1: Οι επαναληπτική διαδικασία εύρεσης βέλτιστης γωνιακής λύσης του αλγόριθμου Simplex

Με βάση τον τελικό πίνακα Simplex μπορούμε να προβούμε στην οικονομική του ερμηνεία όπως φαίνεται παρακάτω:

- Οι συντελεστές μετατροπής και η οικονομική τους ερμηνεία είναι ότι αντιστοιχούν στις ποσότητες των βασικών μεταβλητών που πρέπει να αναλωθούν ώστε να αυξηθεί η τιμή της συγκεκριμένης μη βασικής μεταβλητής κατά 1 μονάδα (οριακά). Σε αυτή την περίπτωση οι μη βασικές μεταβλητές είναι οι S_2 και S_3. Ας δούμε λοιπόν την ερμηνεία των συντελεστών μετατροπής.

Η ποσότητα S_2 συμβολίζει τις μη χρησιμοποιούμενες ώρες στο Τμήμα Συναρμολόγησης. Η τιμή της στην βέλτιστη λύση είναι 0 που σημαίνει πως και οι 400 ώρες που είναι διαθέσιμες χρησιμοποιούνται. Βάσει του τελικού πίνακα έχουμε ότι για να αυξηθεί η S_2 κατά μια μονάδα (να αυξηθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες στο Τμήμα Συναρμολόγησης, δηλαδή να έχουμε 1 ώρα εργασίας λιγότερη) θα πρέπει να μειωθεί η S_1 κατά 2 μονάδες, να μειωθεί η x_1 κατά ¾ της μονάδας και να αυξηθεί η x_2 κατά 1 μονάδα (ο αντίστοιχος συντελεστής μετατροπής είναι -1). Στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε την επίπτωση που θα έχουν οριακές αυξομειώσεις στην βέλτιστη λύση.

Επιπρόσθετα, η ποσότητα S_3 συμβολίζει τις μη χρησιμοποιούμενες ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου. Η τιμή της στην βέλτιστη λύση είναι 0 που σημαίνει πως και οι 420 ώρες που είναι διαθέσιμες χρησιμοποιούνται. Βάσει του τελικού πίνακα έχουμε ότι για να αυξηθεί η S_3 κατά μια μονάδα (να αυξηθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου, δηλαδή να έχουμε 1 ώρα εργασίας λιγότερη) θα πρέπει να αυξηθεί η S_1 κατά 4 μονάδες, να αυξηθεί η x_1 κατά ½ της μονάδας και να μειωθεί η x_2 κατά 1 μονάδα (ο αντίστοιχος συντελεστής μετατροπής είναι -1). Στην συνέχεια θα εκτιμήσουμε την επίπτωση που θα έχουν οριακές αυξομειώσεις στην βέλτιστη λύση.

- Αλλαγές στην βέλτιστη λύση αν οι ώρες εργασίας στο Τμήμα Συναρμολόγησης μειωθούν κατά 1 (ή αν αυξηθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες κατά 1):

	Από	**Σε**
Ώρες στο Τμήμα Συναρμ/σης	400	399
S_1	80	78
x_1	90	$89^{1/4}$
x_2	20	21
Π	1540000	1538250

Δηλαδή η μείωση που προκύπτει στα κέρδη είναι η εξής: $-(3/4)\cdot 15000+1\cdot 9500=-1750$

- Αλλαγές στην βέλτιστη λύση αν οι ώρες εργασίας στο Τμήμα Συναρμολόγησης αυξηθούν κατά 1 (ή αν μειωθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες κατά 1):

	Από	**Σε**
Ώρες στο Τμήμα Συναρμ/σης	400	401
S_1	80	82
x_1	90	$90^{3/4}$
x_2	20	19
Π	1540000	1541750

- Αλλαγές στην βέλτιστη λύση αν οι ώρες εργασίας στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου μειωθούν κατά 1 (ή αν αυξηθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες κατά 1):

	Από	**Σε**
Ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου	420	419
S_1	80	84
x_1	90	$90^{1/2}$
x_2	20	19
Π	1540000	1538000

Δηλαδή η μείωση που προκύπτει στα κέρδη είναι η εξής: $(1/2)\cdot 15000-1\cdot 9500=-2000$

- Αλλαγές στην βέλτιστη λύση αν οι ώρες εργασίας στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου αυξηθούν κατά 1 (ή αν μειωθούν οι μη-χρησιμοποιούμενες ώρες κατά 1):

	Από	**Σε**
Ώρες στο Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου	420	421
S_1	80	76
x_1	90	$89^{1/2}$
x_2	20	21
Π	1540000	1542000

Σχετικά με τις **Σκιώδεις Τιμές** των περιορισμών μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Παρατηρούμε τις τιμές της σειράς $c_j - z_j$ **στον τελικό πίνακα Simplex** που αντιστοιχούν στις μεταβλητές S_1, S_2, S_3 και βλέπουμε ότι είναι 0, -1750 και -2000 αντίστοιχα και δηλώνουν (σύμφωνα με την ερμηνεία της σειράς αυτής) την αύξηση του κέρδους όταν οι μεταβλητές αυτές αυξηθούν κατά 1 μονάδα. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την σειρά z_j η οποία περιέχει τις ποσότητες σε απόλυτο μέγεθος και εκφράζει την μείωση της αντικειμενικής συνάρτησης αν αυξηθεί η ποσότητα της αντίστοιχης στήλης κατά 1 μονάδα.

Οι τιμές αυτές λέγονται **Σκιώδεις Τιμές** των περιορισμών του προβλήματος και εκφράζουν την οριακή αξία κάθε επιπλέον μονάδας στις διαθέσιμες ποσότητες των περιορισμών. Λέγονται **Σκιώδεις** διότι δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν παρά μόνο μέσω της μεθοδολογίας του γραμμικού προγραμματισμού. Παραδείγματος χάρη, η Σκιώδης Τιμή που συνδέεται με τον περιορισμό του Τμήματος Συναρμολόγησης είναι (σε απόλυτο μέγεθος, διότι μας ενδιαφέρει η μεταβολή που προκύπτει στην αντικειμενική συνάρτηση από την αύξηση των ωρών εργασίας και όχι από την αύξηση των μη-χρησιμοποιούμενων πόρων) €1750. Δηλαδή αν ο διευθυντής του Τμήματος Συναρμολόγησης μπορούσε να αποκτήσει 1 επιπλέον ώρα εργασίας στο τμήμα αυτό, θα ήταν διατεθειμένος να πληρώσει έως €1750, όση δηλαδή και η αύξηση που θα προκύψει στο κέρδος από την 1 επιπρόσθετη ώρα λειτουργίας του Τμήματος Συναρμολόγησης.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης, 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Η Μέθοδος Simplex – Παρουσίαση της μεθόδου». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης