Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R

Ενότητα 2η: Εισαγωγή στον Γραμμικό Προγραμματισμό

Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής
Νίκος Χατζησταμούλου, Υπ. Δρ. Οικονομικής Επιστήμης
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Σκοποί ενότητας

- ✓ Να παρουσιάσει τις βασικές μεθόδους και κατηγορίες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
- ✓ Να παρουσιάσει την μαθηματική απεικόνιση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
- ✓ Να παρουσιάσει τις βασικούς ορισμούς, ιδιότητες και προϋποθέσεις των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού.
- ✓ Να παρουσιάσει κάποια ενδεικτικά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού που συναντώνται συχνά στην καθημερινή ζωή.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μέθοδοι γραμμικού προγραμματισμού.
- Κατηγορίες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ).
- Μαθηματική απεικόνιση ενός ΠΓΠ.
- Βασικοί ορισμοί ΠΓΠ.
- Ιδιότητες ΠΓΠ.
- Προϋποθέσεις ΠΓΠ.
- Ενδεικτικά παραδείγματα ΠΓΠ.

Ενότητα $2^{η}$

Βασικές έννοιες γραμμικού προγραμματισμού

Μέθοδοι μαθηματικού προγραμματισμού

- Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)
- Ακέραιος Προγραμματισμός (Integer Programming)
- Μικτός Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός (Mixed Integer Linear Programming)
- Δυναμικός Προγραμματισμός (Dynamic Programming)
- Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός (Non-Linear Programming)
- Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός (Multi-critetion Programming)

❖ Στο παρόν μάθημα εστιάζουμε στον **Γραμμικό Προγραμματισμό**!

Κατηγορίες προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ)

- Γραμμικός προγραμματισμός, όπου τόσο η αντικειμενική συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι γραμμικές σχέσεις.
  - Στο παρόν μάθημα εστιάζουμε στον **Γραμμικό Προγραμματισμό**!
- Ακέραιος προγραμματισμός, όπου οι μεταβλητές απόφασης μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές ή αναπαριστούν αποφάσεις «λογικής» και όχι φυσικά μεγέθη.
- Μη γραμμικός προγραμματισμός, όπου κάποιες από τις συναρτήσεις του προβλήματος (αντικειμενική συνάρτηση, περιορισμοί) είναι μη-γραμμικές.

Γραμμικός προγραμματισμός

- Αποτελεί κομμάτι του μαθηματικού προγραμματισμού και χρησιμοποιείται από πολλούς λήπτες αποφάσεων ιδιωτικών και δημοσίων επιχειρήσεων αλλά και οργανισμών.
- Ο Γραμμικός Προγραμματισμός χρησιμοποιείται ευρέως από τους επιχειρησιακούς ερευνητές για την προσέγγιση προβλημάτων κατανομής περιορισμένων τις περισσότερες φορές πόρων σε εναλλακτικές δραστηριότητες με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.
- Αναζητά μεταξύ όλων των εναλλακτικών σχεδιασμών, εκείνον που θα οδηγήσει στο άριστο αποτέλεσμα.
- Περιγράφει ένα μαθηματικό υπόδειγμα, το οποίο αφορά στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης δεδομένου ενός συνόλου γραμμικών περιορισμών.

Πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (ΠΓΠ)

- Αφορά στην μεγιστοποίηση (ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης των μεταβλητών απόφασης. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης (άγνωστοι) ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Κάθε περιορισμός πρέπει να είναι μια γραμμική εξίσωση ή ανίσωση.
- Κάθε μεταβλητή είναι μη αρνητική ή δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο.

Μαθηματική απεικόνιση ενός ΠΓΠ

Η μαθηματική απεικόνιση ενός ΠΓΠ δίνεται παρακάτω:

$$\max \mathit{or} \ \min \mathrm{Z} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$s.t.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
a_{11}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{1j}x_j + & \ldots & +a_{1n}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{2j}x_j + & \ldots & +a_{2n}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & =,\leq,\geq \ldots \\
a_{m1}x_1 + & \ldots & \ldots & +a_{mj}x_j & \ldots & +a_{mn}x_n + & \ldots & =,\leq,\geq b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Μαθηματικό υπόδειγμα γραμμικού προγραμματισμού

Το μαθηματικό μοντέλο που παρουσιάστηκε προηγουμένως

περιλαμβάνει:

1. Τις μεταβλητές απόφασης δηλαδή τις $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$
2. Τους περιορισμούς-συνθήκες που εμφανίζονται με την μορφή άνισο-εξισώσεων.
3. Τους τεχνολογικούς συντελεστές (παραμέτρους) όπως ο συντελεστής μιας μεταβλητής στους περιορισμούς, δηλαδή $a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{mn}$
4. Την αντικειμενική συνάρτηση (Α.Σ) όπου οι συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ οι οποίοι λέγονται συντελεστές κέρδους (κόστους) για προβλήματα μεγιστοποίησης (ελαχιστοποίησης).

- Υποθέτουμε πως έχουμε *m* εξισώσεις με *n* αγνώστους καθώς επίσης και ότι πάντα ισχύει $rank(\mathbf{A}) = m < n$

Βασικοί ορισμοί ΠΓΠ - I

- **Λύση** του ΠΓΠ είναι κάθε λύση του συστήματος $\mathbf{Ax} \leq, =, \geq \mathbf{b}$ δηλαδή κάθε διάνυσμα x^* που ικανοποιεί το σύστημα αυτό (ή ο συνδυασμός τιμών των μεταβλητών απόφασης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού).
- Το υποσύνολο του που σχηματίζεται από τα σημεία – λύσεις που ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού ονομάζεται εφικτή περιοχή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, τα δε σημεία $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, εφικτές λύσεις.
- **Δυνατή (ή εφικτή) λύση** του ΠΓΠ είναι κάθε λύση του συστήματος, δηλαδή κάθε διάνυσμα x^* που ικανοποιεί τους περιορισμούς $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Μια λύση που παραβιάζει τουλάχιστον έναν από τους περιορισμούς, ονομάζεται μη-εφικτή λύση και δεν είναι σημείο της εφικτής περιοχής του ΠΓΠ.

Βασικοί ορισμοί ΠΓΠ - ΙΙ

- **Βέλτιστη δυνατή λύση (βέλτιστη λύση)** του ΠΓΠ είναι κάθε λύση που βελτιστοποιεί (μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί) την αντικειμενική συνάρτηση.
- **Βάση** του συστήματος (ή βάση) είναι ο πίνακας $m \times m$, που προκύπτει από τον πίνακα ***A*** του συστήματος και έχει *m* γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Οι *m* μεταβλητές που αντιστοιχούν στις στήλες μιας βάσεως, λέγονται **βασικές μεταβλητές** ως προς τη βάση αυτή. Οι υπόλοιπες (*n*-*m*) μεταβλητές που αντιστοιχούν στις (*n*-*m*) στήλες του πίνακα ***A*** που δεν περιλαμβάνονται στη βάση λέγονται **μη - βασικές μεταβλητές**.
- **Βασική εφικτή λύση** ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς μια βάση ***A***, είναι μια εφικτή λύση του συστήματος αυτού, που έχει το πολύ όλες τις βασικές μεταβλητές, ως προς τη βάση αυτή, διάφορες του μηδενός (θετικές) και όλες τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν.

Ιδιότητες ΠΓΠ - Ι

- Ο αριθμός των βασικών εφικτών λύσεων ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις είναι πεπερασμένος.

- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός ΠΓΠ είναι κυρτό κλειστό σύνολο.

- Κάθε βασική εφικτή λύση ενός ΠΓΠ είναι ένα ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου (κορυφή του πολυγώνου) των εφικτών λύσεων και κάθε ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου είναι μια βασική δυνατή λύση του συστήματος των περιορισμών.

Ιδιότητες ΠΓΠ - ΙΙ

- Αν υπάρχει μια εφικτή λύση σε ένα ΠΓΠ, τότε υπάρχει και μια βασική εφικτή λύση αυτού του ΠΓΠ.

- Αν υπάρχει μια βέλτιστη εφικτή λύση σε ένα ΠΓΠ, τότε η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της σε ένα τουλάχιστον ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου των εφικτών λύσεων, δηλαδή σε μια βασική εφικτή λύση.

- Αν υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη εφικτή λύση, που δεν είναι βασική, τότε υπάρχουν άπειρες βέλτιστες δυνατές λύσεις.

Ιδιότητες ΠΓΠ - III

- Το σύνολο των εφικτών λύσεων καλείται **εφικτή περιοχή** (συνήθως συμβολίζεται με *F*).

- Το ΠΓΠ λέγεται φραγμένο εάν ισχύει $\max \tilde{\mathbf{c}}^{'} \mathbf{x} < \infty$.

- Εάν ισχύει η ισότητα τότε το ΠΓΠ δεν έχει άριστη λύση. Τάξη ενός πίνακα (**A**) λέγεται ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του **A**. Εάν r είναι γραμμικά ανεξάρτητες οι m-r είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Προϋποθέσεις ΠΓΠ - Ι

1. Προσθετικότητα
Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι άμεσα αναλογική με το επίπεδο της δραστηριότητας. Όταν το επίπεδο της δραστηριότητας αυξάνει ή μειώνεται, η αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση που οφείλεται στην αλλαγή μίας μονάδας της δραστηριότητας παραμένει ίδια. Επίσης, το ποσό των πόρων που χρησιμοποιούνται σε κάθε δραστηριότητα είναι άμεσα ανάλογο με το επίπεδο της δραστηριότητας.

2. Αναλογικότητα
Η συνεισφορά όλων των δραστηριοτήτων στην αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το άθροισμα της συνεισφοράς της κάθε μίας δραστηριότητας. Όμοια, το συνολικό ποσό των πόρων που χρησιμοποιείται από όλες τις δραστηριότητες είναι το άθροισμα του ποσού των πόρων που κάθε μία δραστηριότητα χρησιμοποιεί ανεξάρτητα.

Προϋποθέσεις ΠΓΠ - ΙΙ

3. Διαιρετότητα

Όλες οι δραστηριότητες είναι συνεχείς και μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική τιμή. Δηλαδή ο Γραμμικός Προγραμματισμός δεν είναι κατάλληλος για προβλήματα που οι μεταβλητές λήψης απόφασης είναι ακέραιοι.

4. Καθοριστικότητα

Τα ΠΓΠ καταγράφονται και ως καθοριστικά υποδείγματα. Με άλλα λόγια, δεν λαμβάνουν υπόψη ότι όλοι οι συντελεστές είναι προσεγγίσεις όταν υπολογίζεται μία συγκεκριμένη λύση. Για τον λόγο αυτό, πρέπει να γίνεται **ανάλυση ευαισθησίας** των παραμέτρων του μαθηματικού υποδείγματος για την αξιοπιστία της λύση που προσδιορίσαμε.

Ιδιότητες λύσεων ΠΓΠ

1. Ένα σύνολο θα καλείται κυρτό όταν:

$$\forall\ x_1, x_2 \in M, \lambda : 0 < \lambda < 1$$
$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in M$$

2. Ακρότατο κυρτού συνόλου *Μ* είναι κάθε σημείο x:

$$x_1, x_2 \in M, \lambda : 0 < \lambda < 1 \text{ με } x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

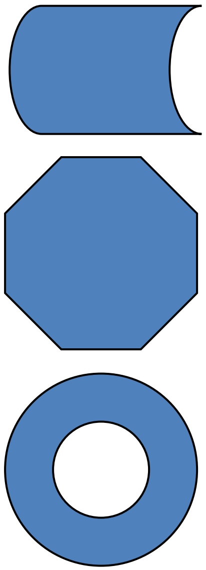
3. Κυρτό πολύεδρο είναι το σύνολο των κυρτών συνδυασμών ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων.

4. Υπέρ-επίπεδο καλείται το σύνολο των σημείων

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) : a_1 x_1 + a_2 x_2 ... + a_n x_n = b$$

3. Ημί-επίπεδο αντίστοιχα:

$$x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) : a_1 x_1 + a_2 x_2 ... + a_n x_n \lesseqgtr b$$



Ενδεικτικά ΠΓΠ - Ι

- **Επιλογή συνδυασμού παραγωγής προϊόντων (Product Mix Problem).**

Μια επιχείρηση εκμεταλλεύεται τους παραγωγικούς πόρους που έχει στη διάθεσή της για να παράγει διάφορα προϊόντα. Οι πόροι δεν είναι ανεξάντλητοι και η άριστη απόφαση εντοπίζει το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν από το κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος.

- **Το πρόβλημα της δίαιτας (Diet Problem, Stigler, 1945).**

Αναζητείται η βέλτιστη κατανομή τροφίμων ώστε να καταναλώνεται ένα διαιτολόγιο το οποίο να πληροί συγκεκριμένες διατροφικές προδιαγραφές με το ελάχιστο κόστος.

- **Το πρόβλημα μίξης υλικών (Blending Problem).**

Έχει τις ρίζες του στη βιομηχανία διύλισης όπου είναι επιθυμητό να εντοπιστεί ένα άριστο σχέδιο μίξης διαφορετικών πρώτων υλών για την παραγωγή καυσίμων με συγκεκριμένες προδιαγραφές. Το ερώτημα αφορά στην εύρεση της «συνταγής» η οποία θα δώσει το ζητούμενο μίγμα με το ελάχιστο κόστος.

Ενδεικτικά ΠΓΠ - ΙΙ

- **Επιλογή χαρτοφυλακίου (Portfolio Selection).**

Αφορά στην κατάρτιση ενός βέλτιστου σχεδίου επενδύσεων σε μετοχές, ομόλογα, αμοιβαία κεφάλαια, κτλ. Το σχέδιο πρέπει να οδηγεί σε μεγιστοποίηση κερδών ικανοποιώντας περιορισμούς που στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου.

- **Το Πρόβλημα της Μεταφοράς (Transportation Problem,Hitchcok, 1941, Koopmans,1949, Dantzig, 1951).**

Αναζήτηση του οικονομικότερου τρόπου διακίνησης προϊόντων από διαφορετικές πηγές-προελεύσεις (παραγωγικές μονάδες, αποθήκες, κέντρα διανομής, κτλ.) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (σημεία πώλησης, αποθήκες, κτλ.)

Στάδια δημιουργίας υποδείγματος

❖ Η αντιμετώπιση ενός ΠΓΠ περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. Αναγνώριση και περιγραφή του προβλήματος.
2. Καθορισμός των παραμέτρων του ΠΓΠ.
3. Εντοπισμός των περιορισμών του προβλήματος.
4. Αναζήτηση λύσεων και επιλογή της βέλτιστης λύσης.
5. Δοκιμή και υλοποίηση μέσω στης εφαρμογής της βέλτιστης λύσης.

Παράδειγμα ΠΓΠ (διατύπωση)

Ένα εργοστάσιο παράγει δυο προϊόντα, τα προϊόντα 1 και 2. Η έρευνα αγοράς περιορίζει την παράγωγη του προϊόντος 1 στους 10 τόνους ανά μήνα και του προϊόντος 2 στους 8 τόνους. Για την παράγωγη των προϊόντων χρησιμοποιούνται δυο πρώτες ύλες, οι Α και Β.

- ✓ Για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 1 απαιτούνται 1 τόνος πρώτης ύλης Α και 3 τόνοι πρώτης ύλης Β, ενώ για την παραγωγή ενός τόνου προϊόντος 2 απαιτούνται 2 τόνοι πρώτης ύλης Α και 1 τόνος πρώτης ύλης Β.
- ✓ Οι μηνιαίες διαθέσιμες ποσότητες πρώτων υλών Α και Β είναι αντίστοιχα 14 και 16 τόνοι.
- ✓ Η πώληση ενός τόνου προϊόντος 1 αφήνει καθαρό κέρδος 5 χιλιάδες ευρώ ενώ το καθαρό κέρδος για το προϊόν 2 είναι 4 χιλιάδες ευρώ ανά μήνα.

Παράδειγμα ΠΓΠ (αποτύπωση) - Ι

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει το πρόβλημα:

Πρώτη Ύλη	**Προϊόν 1, τόνοι**	**Προϊόν 2, τόνοι**	**Ποσότητα**
A	1	2	14
B	3	1	16
Κέρδος, χιλ. €	5	4	

- Πρέπει να ορίσουμε τις μεταβλητές του προβλήματος:

x_1 ποσότητα προϊόντος 1, x_2 ποσότητα προϊόντος 2

Παράδειγμα ΠΓΠ (αποτύπωση) - II

❖ Η μαθηματική μορφή του προβλήματος είναι:

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_1, x_2} Y = 5x_1 + 4x_2 \\
&s.t. \\
&x_1 \leq 10 \\
&x_2 \leq 8 \\
&x_1 + 2x_2 \leq 14 \\
&3x_1 + x_2 \leq 16 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Τέλος 2ης Ενότητας

Βασικές έννοιες γραμμικού προγραμματισμού

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Κων/νος Κουνετάς, Επίκουρος Καθηγητής και Νικόλαος Χατζησταμούλου, Υπ. Διδάκτωρ Οικονομικής Επιστήμης 2015. «Επιχειρησιακή Έρευνα και εφαρμογές με την χρήση του λογισμικού R. Βασικές έννοιες γραμμικού προγραμματισμού». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.