Επιχειρησιακή Έρευνα, 2019

Εργαστήριο 1ο: Διαγραμματική αναπαράσταση μέσω του Graph

Στεργίου Ειρήνη (email: e.stergiou@upnet.gr)

Πανεπιστήμιο Πατρών,

Σχολή Οργάνωσης & Διοίκησης Επιχειρήσεων,

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

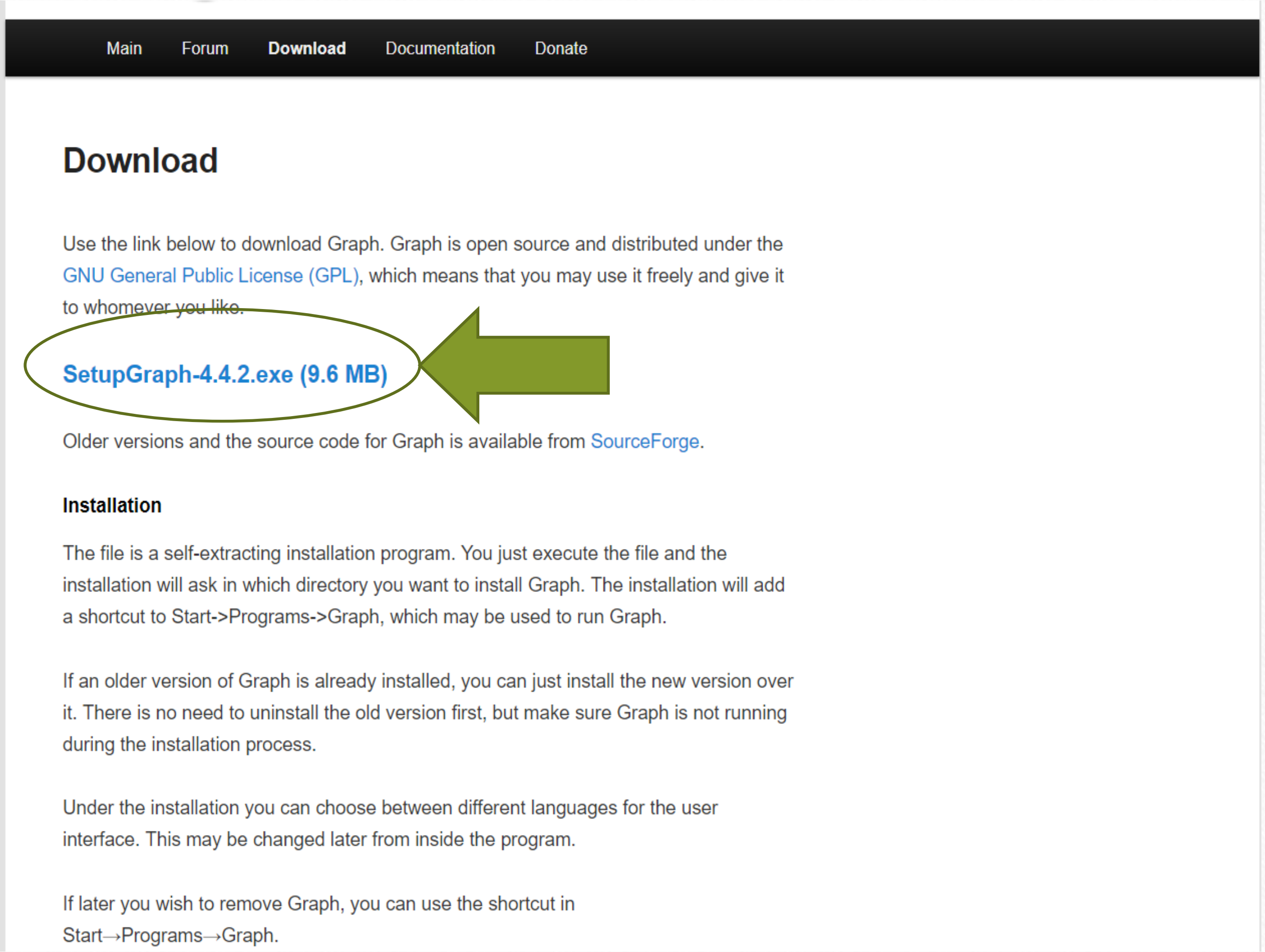
Γραφική επίλυση π.γ.π

- Γραφική μέθοδος για την απεικόνιση του προβλήματος στις 2 διαστάσεις
- Οπτικοποίηση των χαρακτηριστικών των φαινομένων που μελετάμε
- Απαιτητική διαδικασία ως προς τον χρόνο εκτέλεσης

Χρήση του λογισμικού Graph

Why use graph?

- Δυνατότητα αποτύπωσης γραφικά των μαθηματικών συναρτήσεων
- Ελεύθερο πρόγραμμα: https://www.padowan.dk/


Main Forum **Download** Documentation Donate

Download

Use the link below to download Graph. Graph is open source and distributed under the GNU General Public License (GPL), which means that you may use it freely and give it to whomever you like.

SetupGraph-4.4.2.exe (9.6 MB)

Older versions and the source code for Graph is available from SourceForge.

Installation

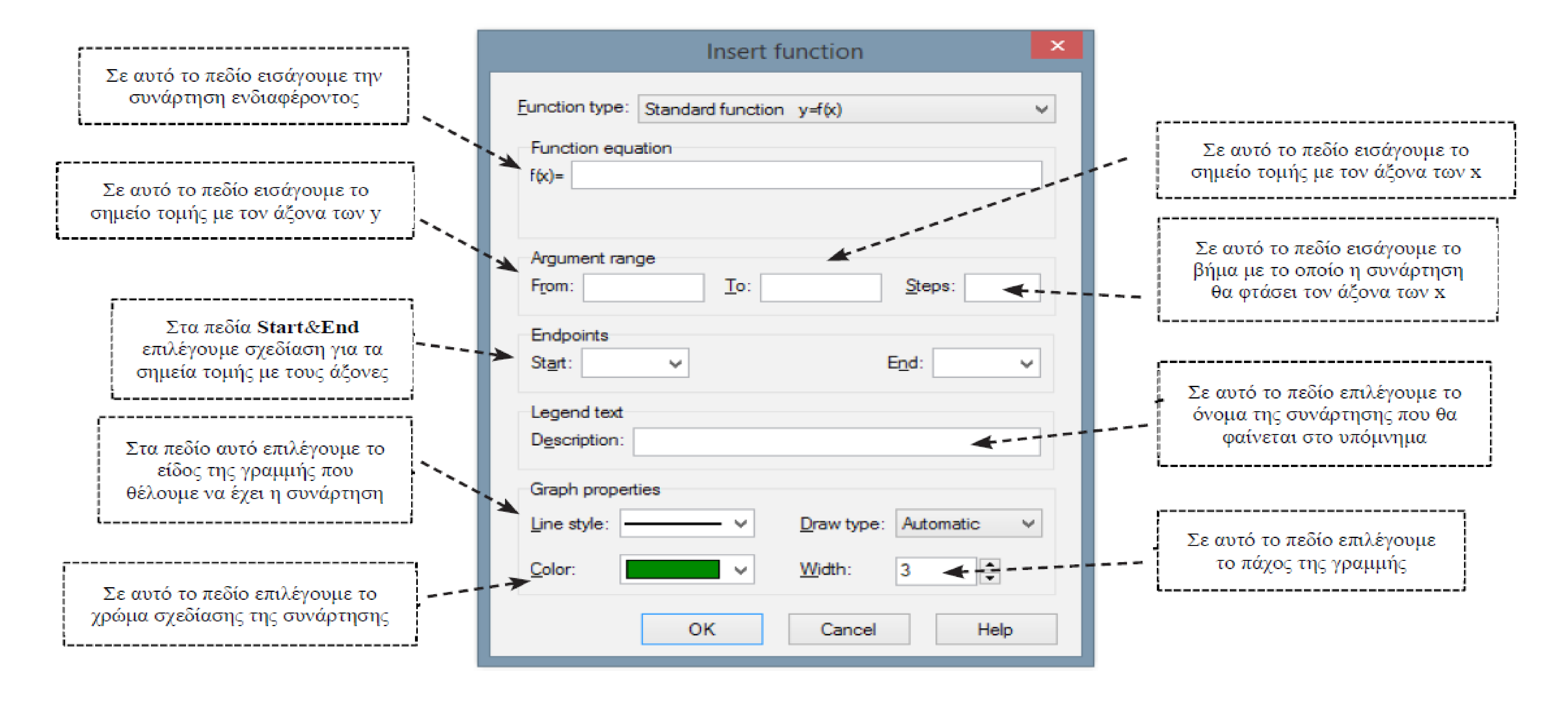
The file is a self-extracting installation program. You just execute the file and the installation will ask in which directory you want to install Graph. The installation will add a shortcut to Start->Programs->Graph, which may be used to run Graph.

If an older version of Graph is already installed, you can just install the new version over it. There is no need to uninstall the old version first, but make sure Graph is not running during the installation process.

Under the installation you can choose between different languages for the user interface. This may be changed later from inside the program.

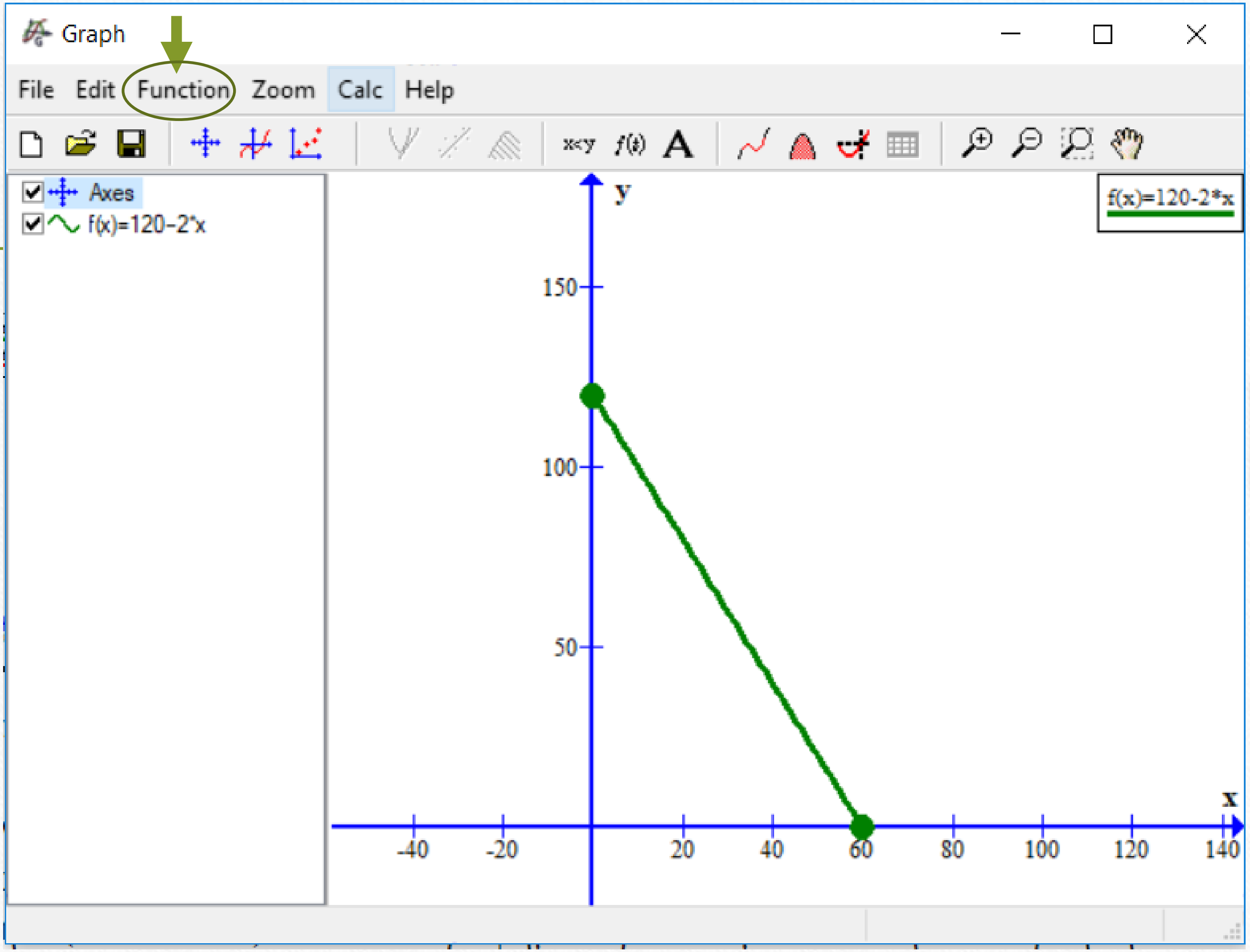
If later you wish to remove Graph, you can use the shortcut in Start→Programs→Graph.

Περιβάλλον του graph



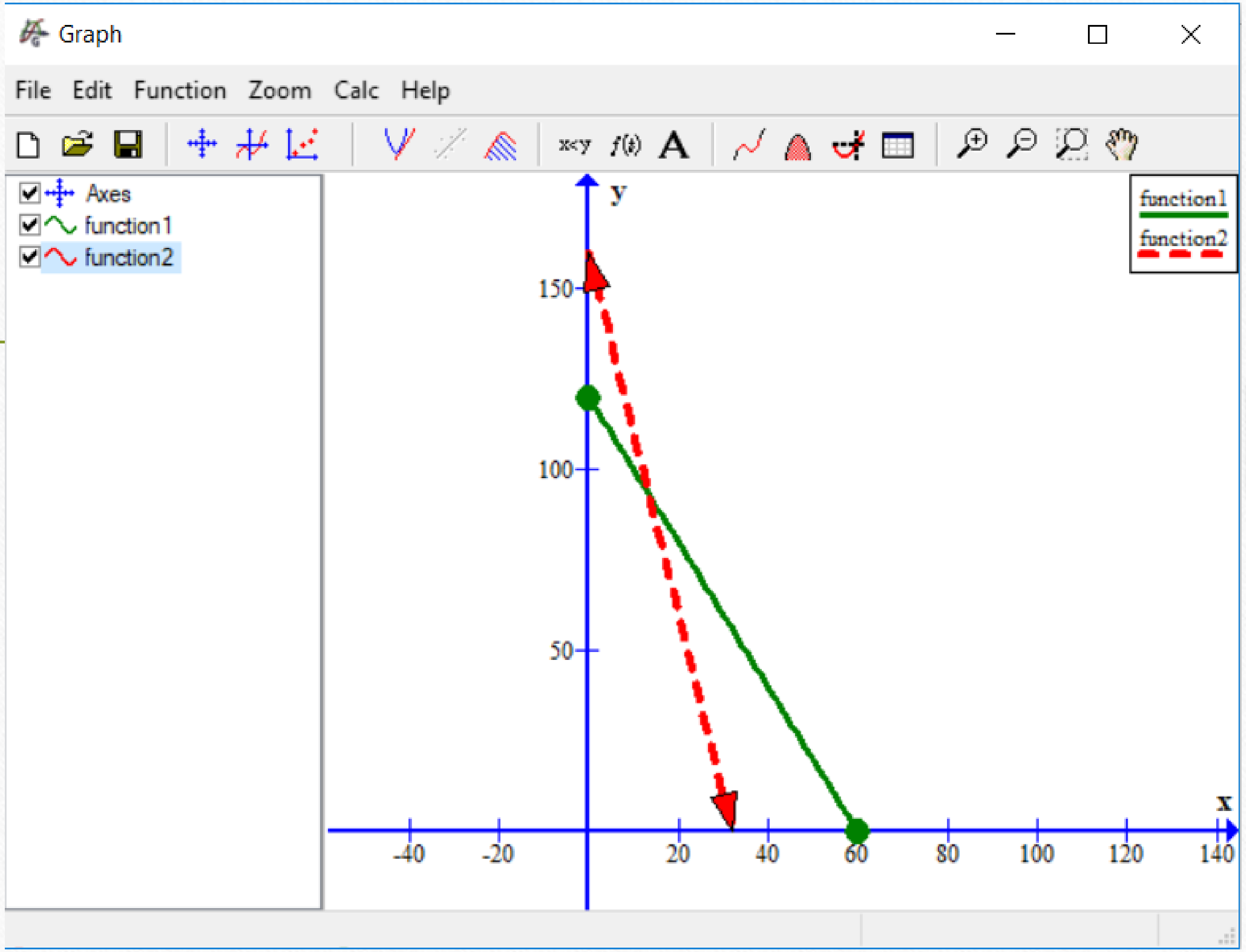
Παράδειγμα Ι

- Έστω συνάρτηση: y_1=f(x)=120-2*x



Παράδειγμα Ι

- Έστω συνάρτηση: y_2=f(x)=160-5*x



Παράδειγμα ΙΙ

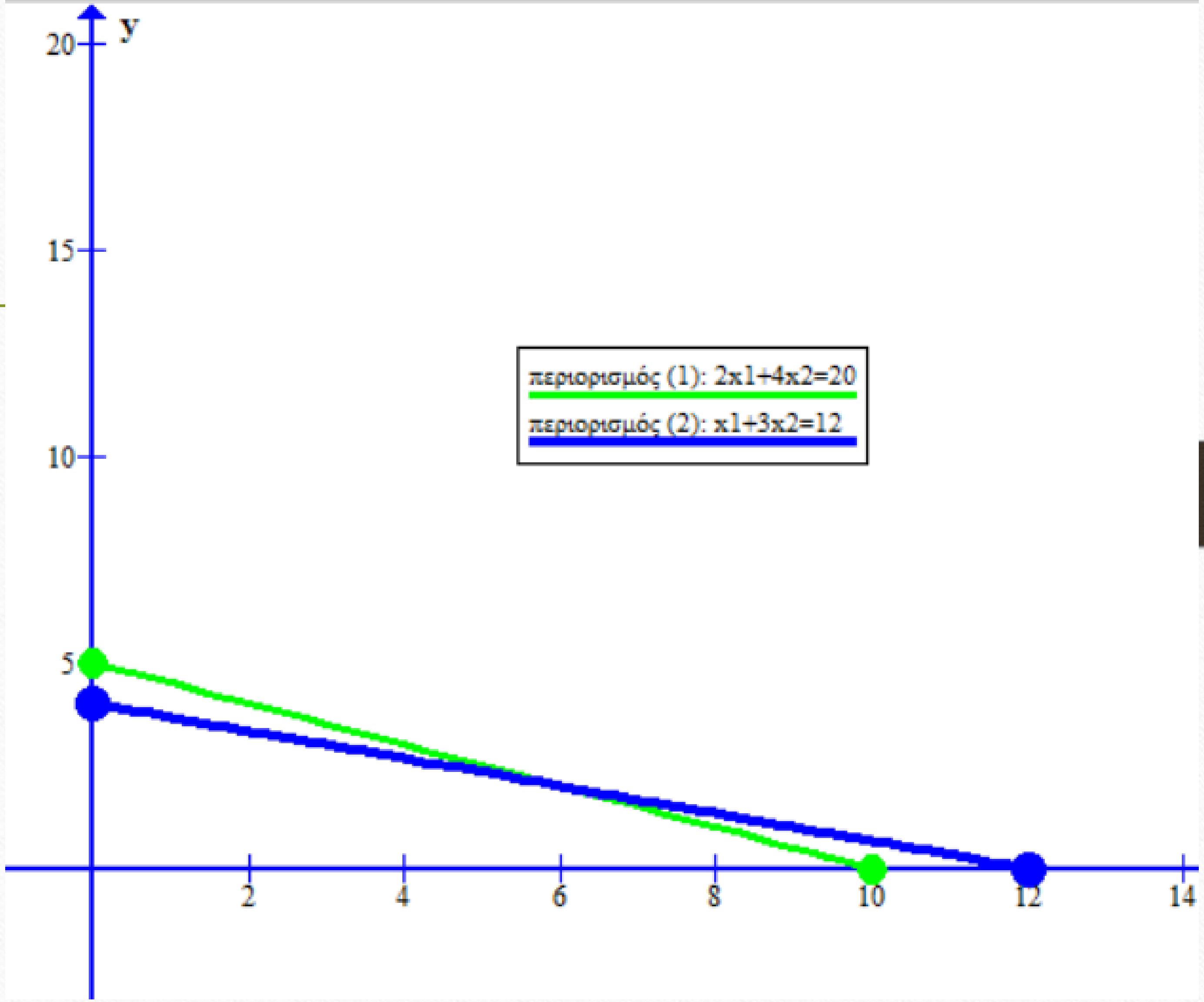
- Μια επιχείρηση που λειτουργεί εντός ενός βιομηχανικού μεταποιητικού κλάδου παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2. Η παραγωγή του κάθε τεμαχίου απαιτεί συγκεκριμένο χρόνο λειτουργίας δύο μηχανών διαφορετικού τύπου, δηλαδή τύπου Α και τύπου Β. Η μηχανή τύπου Α μπορεί να χρησιμοποιηθεί για είκοσι (20) ώρες ανά ημέρα ενώ η μηχανή τύπου Β είναι διαθέσιμη στην διαδικασία παραγωγής για δώδεκα (12) ώρες ανά ημέρα. Προκειμένου να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 1 απαιτούνται δύο (2) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και μία (1) ώρα λειτουργίας της μηχανής τύπου Β ενώ για να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος 2 απαιτούνται τέσσερεις (4) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Α και τρεις (3) ώρες λειτουργίας της μηχανής τύπου Β. Το αντίστοιχο (μικτό) κέρδος για την επιχείρηση ανέρχεται σε σαράντα ευρώ (40€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 1 και σε εκατό ευρώ (100€) για κάθε μονάδα του προϊόντος 2. Η επιχείρηση έχει την δυνατότητα να διοχετεύσει στην αγορά όλη την παραγόμενη ποσότητα και από τα δύο προϊόντα με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Ζητείται να προσδιορίσετε την ποσότητα των τεμαχίων ανά προϊόν που πρέπει να παράγει η εν λόγω επιχείρηση ημερησίως προκειμένου να πετύχει τον σκοπό που έχει θέσει.
- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$
- s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

  $x_1 + 3 * x_2 \leq 12$

  $x_1, x_2 \geq 0$ **(περιορισμός μη-αρνητικότητας)**

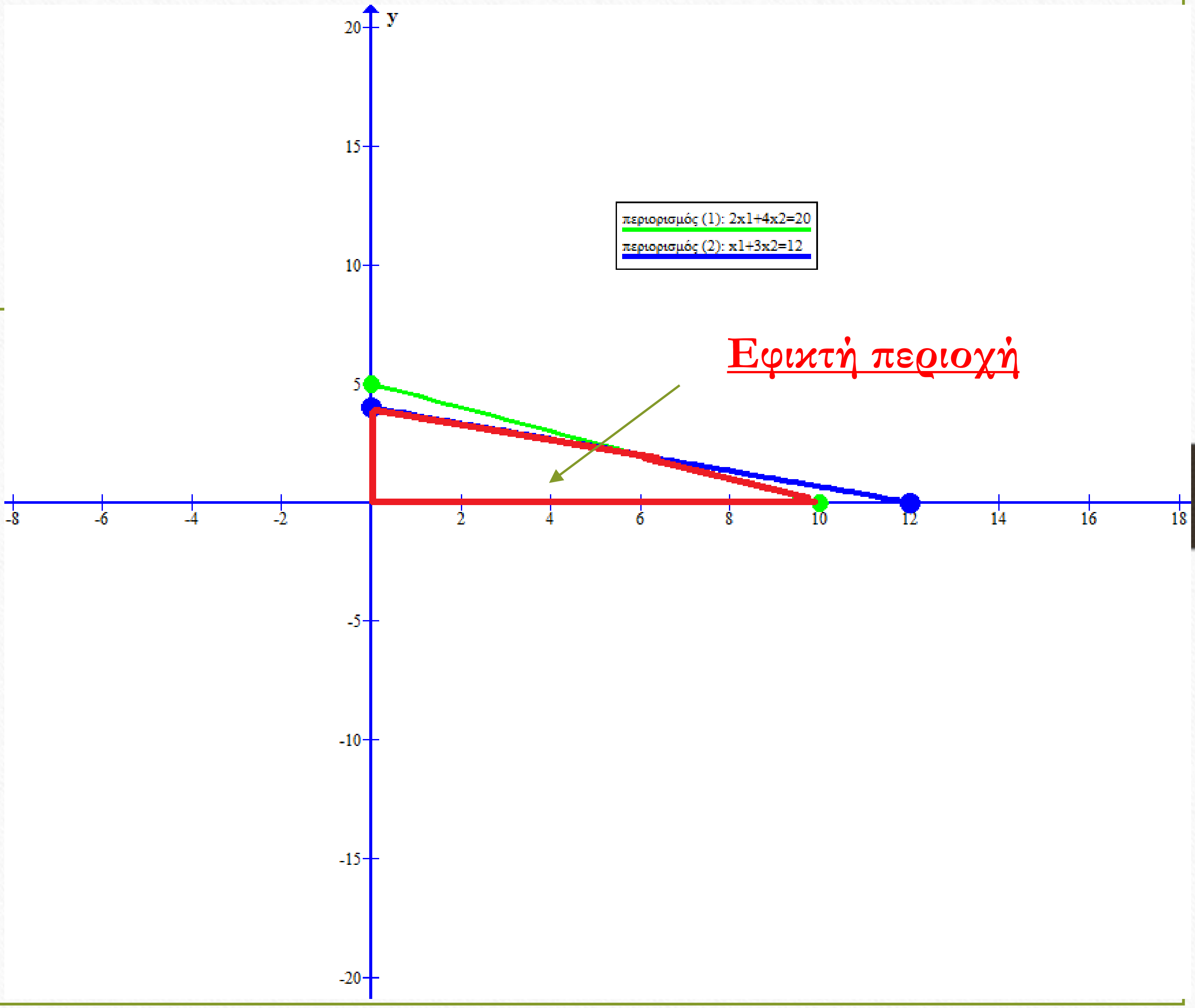
Γραφική επίλυση

- **Αγνοώ τις ανισότητες και μηδενίζω τα x1,x2 για να βρω τα σημεία τομής με τους άξονες**



- Περιορισμοί

- Εφικτή περιοχή
  - Είναι η περιοχή που βρίσκεται στο κάτω από τους περιορισμούς (κόκκινο πλαίσιο)
  - Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται σε κάποιο γωνιακό σημείο της εφικτής περιοχής

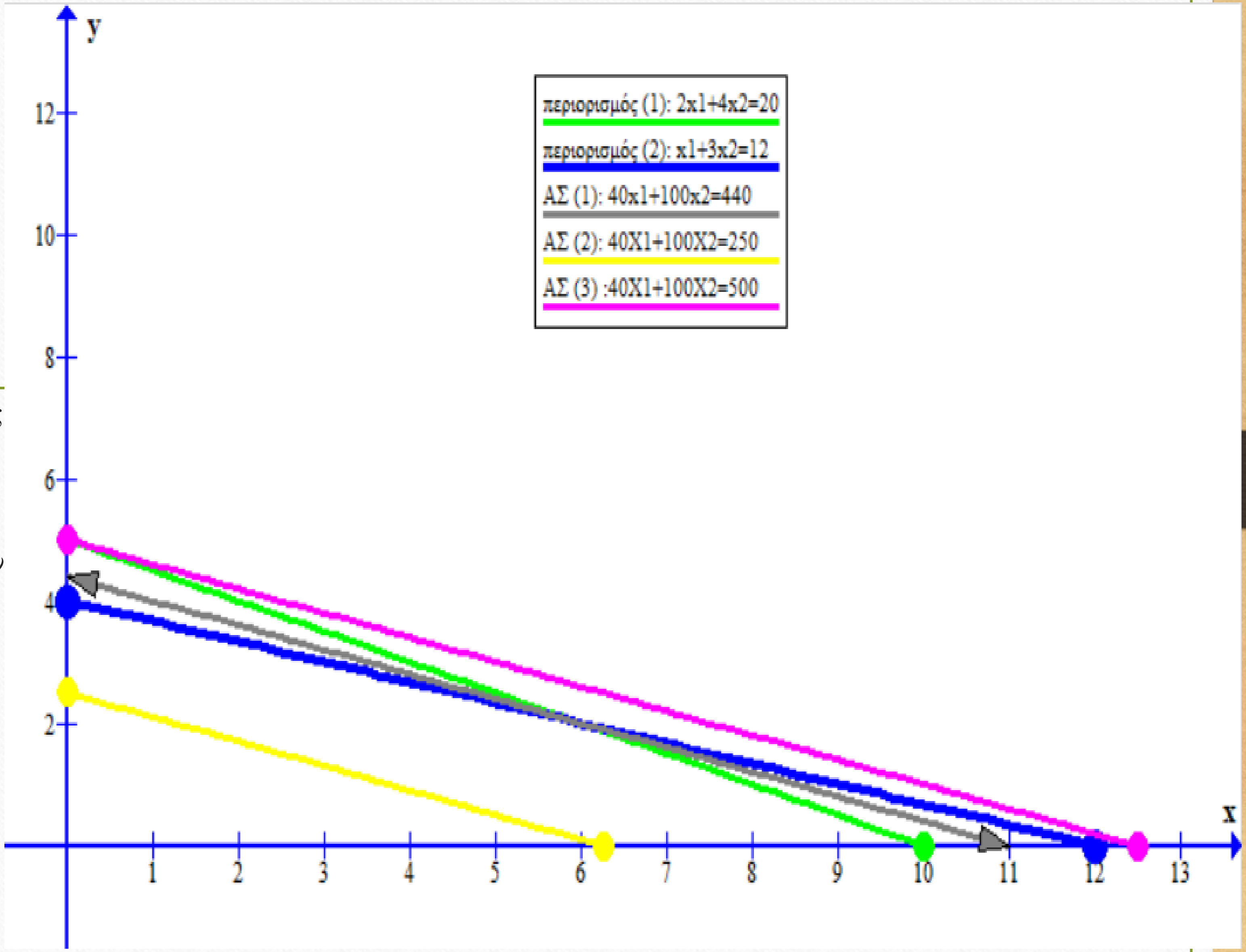


Διαφορετικά επίπεδα κέρδους

- Το γωνιακό σημείο που αποτελεί την λύση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού εξαρτάται κάθε φορά από ***την κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης***, δηλαδή από τον συντελεστή διεύθυνσης = λόγο των συντελεστών κέρδους (κόστους) των δύο προϊόντων:

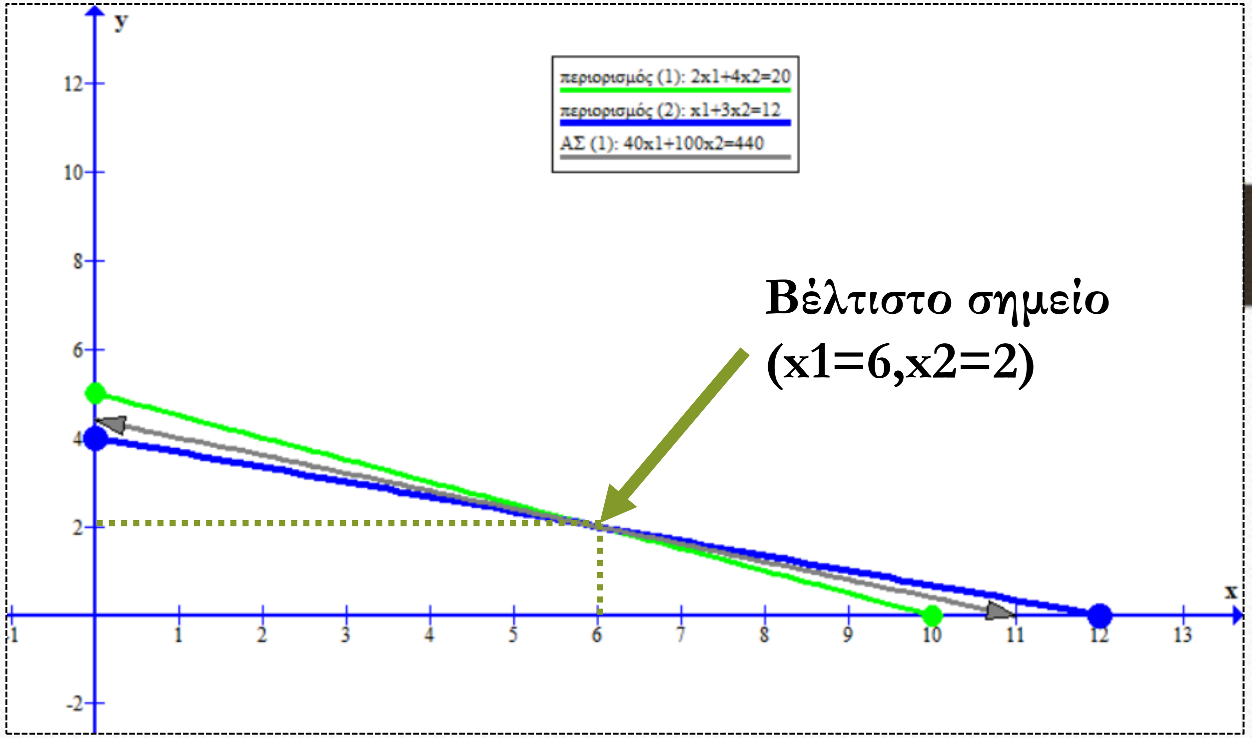
$$\left(\frac{x}{y} = -\frac{40}{100} = -\frac{2}{5}\right)$$

- Για διαφορετικές τιμές τις αντικειμενικής συνάρτησης, διατηρώντας αμετάβλητους τους συντελεστές κέρδους του κάθε προϊόντος προκύπτουν διαφορετικές ευθείες



Βέλτιστο σημείο

- Για να βρούμε το (γωνιακό) σημείο που μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών
  - $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$
  - $x_1 + 3 * x_2 = 12$



ΚΛΙΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥ

- $\boldsymbol{max\Pi = 20 * x_1 + 40 * x_2}$

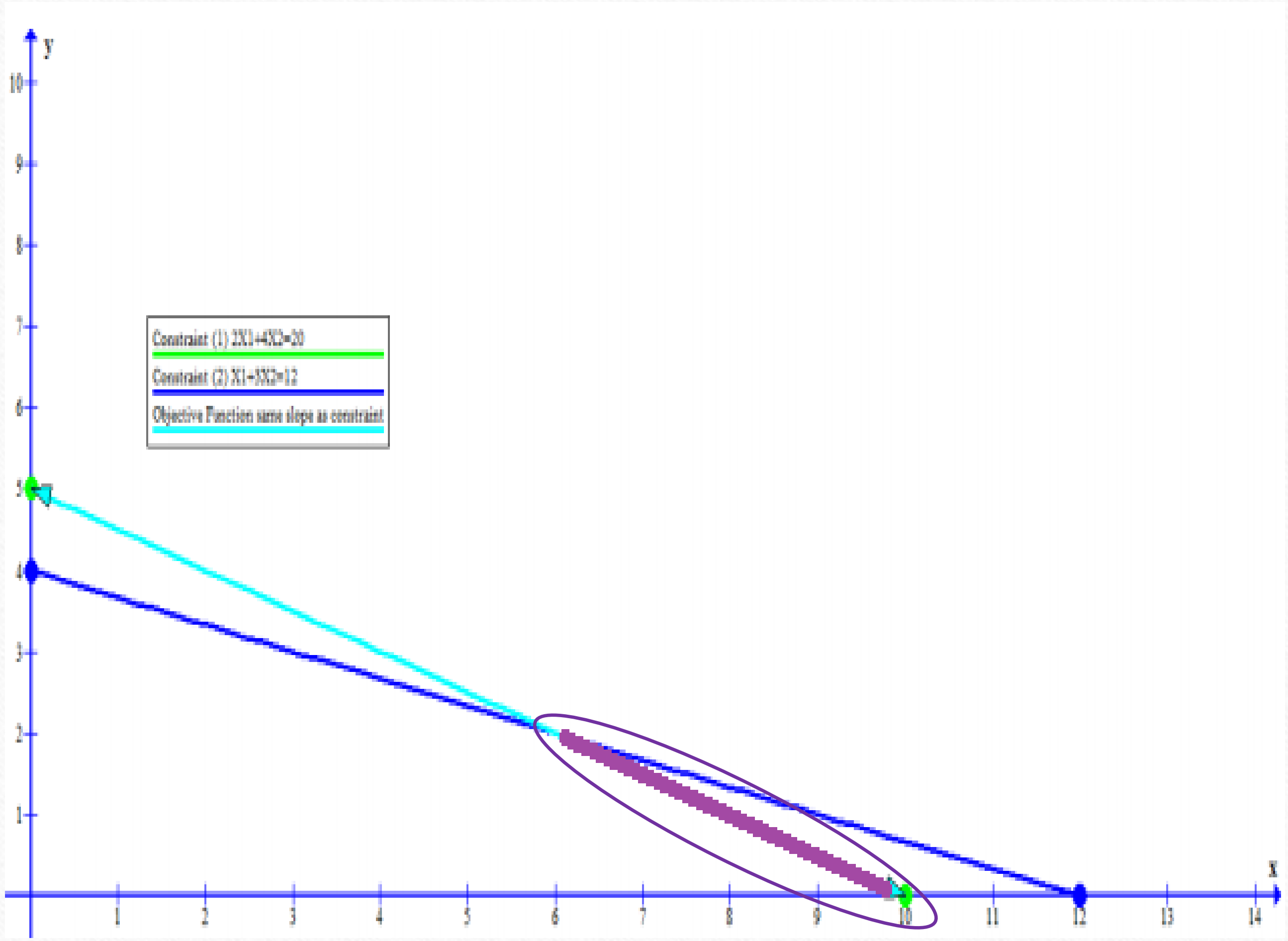
s.t. $\boldsymbol{2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20}$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

- **Ίδια κλίση περιορισμού με Α.Σ.**

⇒ εναλλακτικά βέλτιστα σημεία κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που οι δύο ευθείες ταυτίζονται **(δηλαδή άπειρα!)**



ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

- Ερώτημα: Η βέλτιστη λύση είναι αξιόπιστη ως προς τις (οριακές) αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος;
- Η **Σκιώδης Τιμή** αποτελεί την μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από μια μοναδιαία (ή οριακή) μεταβολή στο δεξί μέλος κάποιου από το σύνολο των περιορισμών.

- **Μεταβολή στους περιορισμούς**

1) **Περιορισμός διαθεσιμότητας**

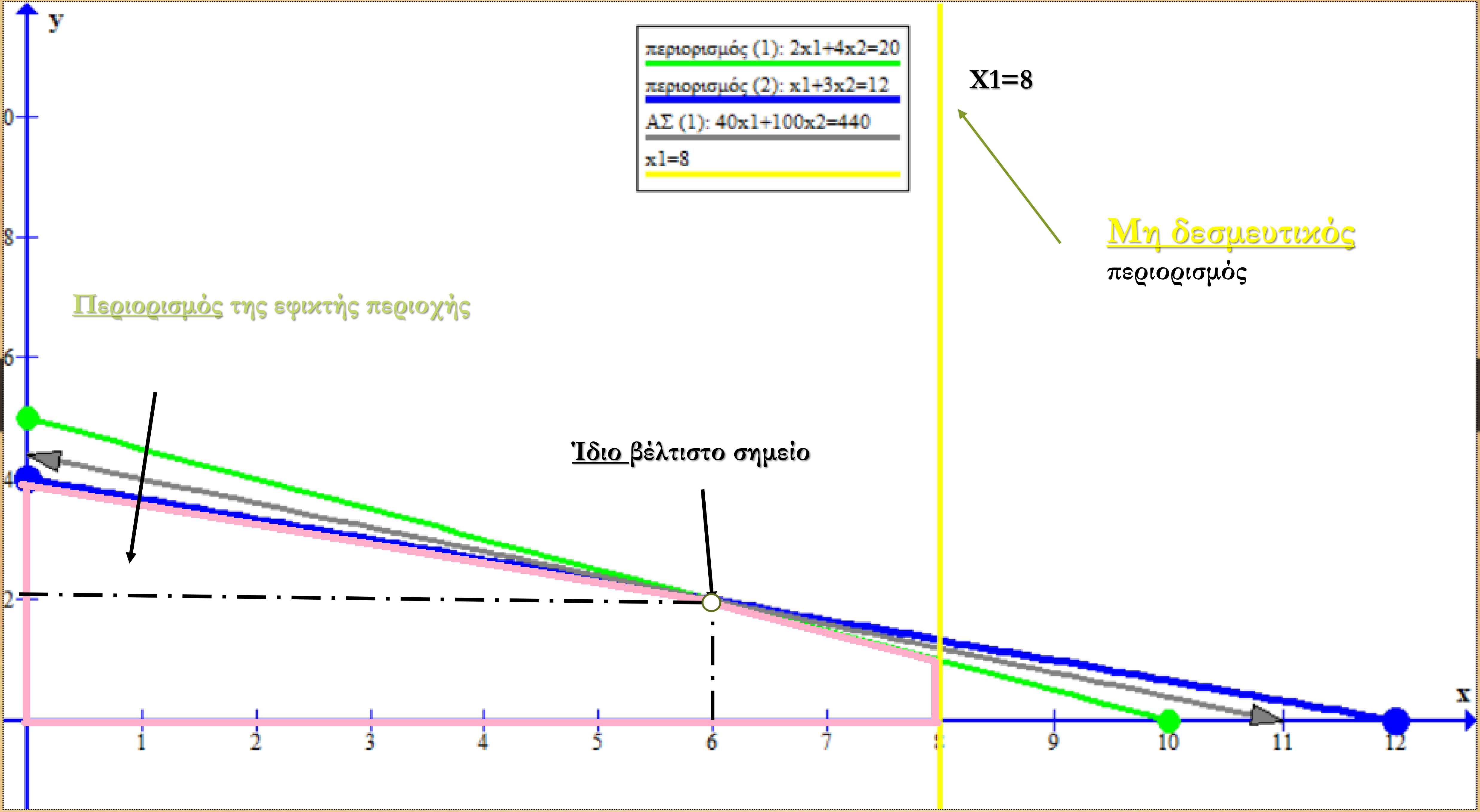
Έστω ότι : $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$

$\boldsymbol{x_1 \leq 8}$

$x_1, x_2 \geq 0$



περιορισμός (1): 2x1+4x2=20
περιορισμός (2): x1+3x2=12
ΑΣ (1): 40x1+100x2=440
x1=8
X1=8
Μη δεσμευτικός
περιορισμός
Περιορισμός της εφικτής περιοχής
Ίδιο βέλτιστο σημείο
y
x
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

2) **Μεταβολές στις διαθέσιμες ποσότητες**

i. Οριακή Αύξηση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20 \quad \Rightarrow 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq \mathbf{21}$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$

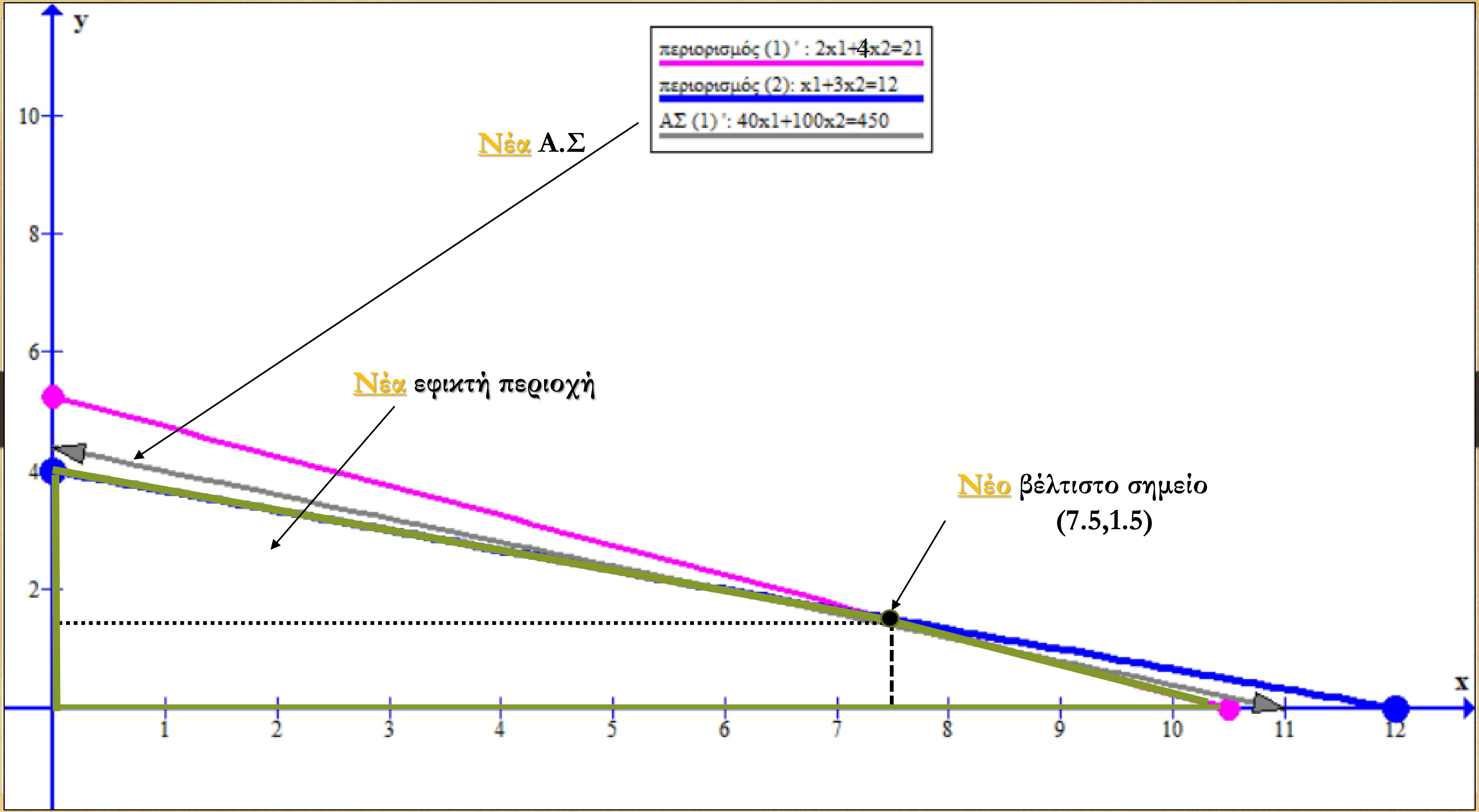
$x_1, x_2 \geq 0$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση : $2 * x_1 + 4 * x_2 = 21$

$x_1 + 3 * x_2 = 12$

Επομένως νέο βέλτιστο σημείο : (x_1=7.5, x_2=1.5)

Νέα **τιμή Α.Σ.:** $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 = \mathbf{450}$



y
x
περιορισμός (1)' : 2x1+4x2=21
περιορισμός (2): x1+3x2=12
ΑΣ (1)': 40x1+100x2=450
Νέα Α.Σ
Νέα εφικτή περιοχή
Νέο βέλτιστο σημείο
(7.5,1.5)

ii. Οριακή Μείωση των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Α

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$ $\Rightarrow 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq$ **19**

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12$

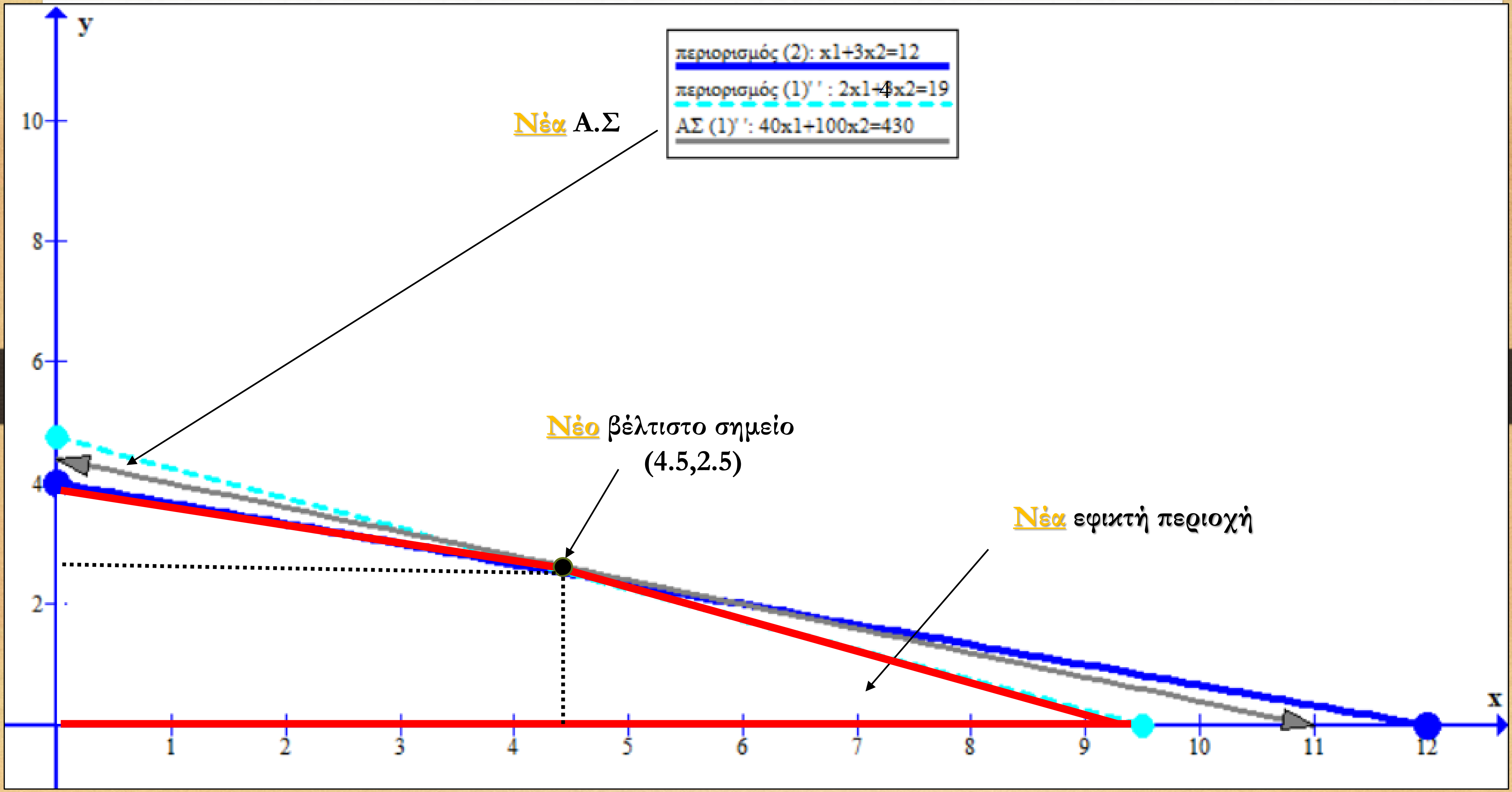
$x_1, x_2 \geq 0$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση : $2 * x_1 + 4 * x_2 = 19$

$x_1 + 3 * x_2 = 12$

Επομένως νέο βέλτιστο σημείο : (x_1=4.5, x_2=2.5)

Νέα τιμή Α.Σ.: $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 =$ **430**



y
10
8
6
4
2
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
περιορισμός (2): x1+3x2=12
περιορισμός (1)' ' : 2x1+4x2=19
ΑΣ (1)' ': 40x1+100x2=430
Νέα Α.Σ
Νέο βέλτιστο σημείο
(4.5,2.5)
Νέα εφικτή περιοχή

ii. **Οριακή Αύξηση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow x_1 + 3 * x_2 \leq$ **13**

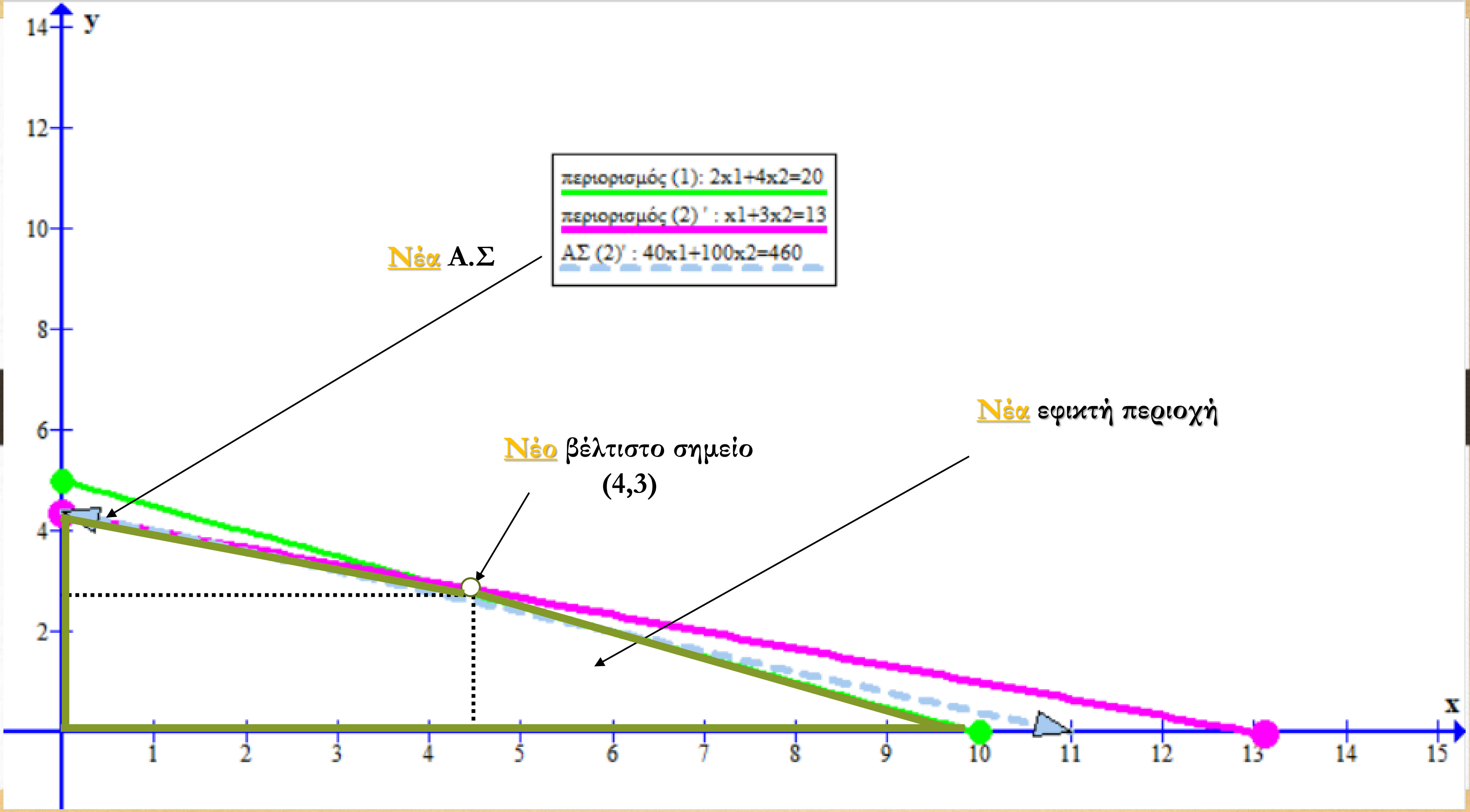
$x_1, x_2 \geq 0$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση : $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$

$x_1 + 3 * x_2 = 13$

Επομένως νέο βέλτιστο σημείο : (x_1=4, x_2=3)

Νέα **τιμή Α.Σ.:** $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 =$ **460**



περιορισμός (1): 2x1+4x2=20
περιορισμός (2) ' : x1+3x2=13
ΑΣ (2)' : 40x1+100x2=460
Νέα Α.Σ
Νέα εφικτή περιοχή
Νέο βέλτιστο σημείο
(4,3)
y
x

ii. **Οριακή Μείωση** των διαθέσιμων ωρών λειτουργίας της μηχανής τύπου Β

- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow x_1 + 3 * x_2 \leq$ **11**

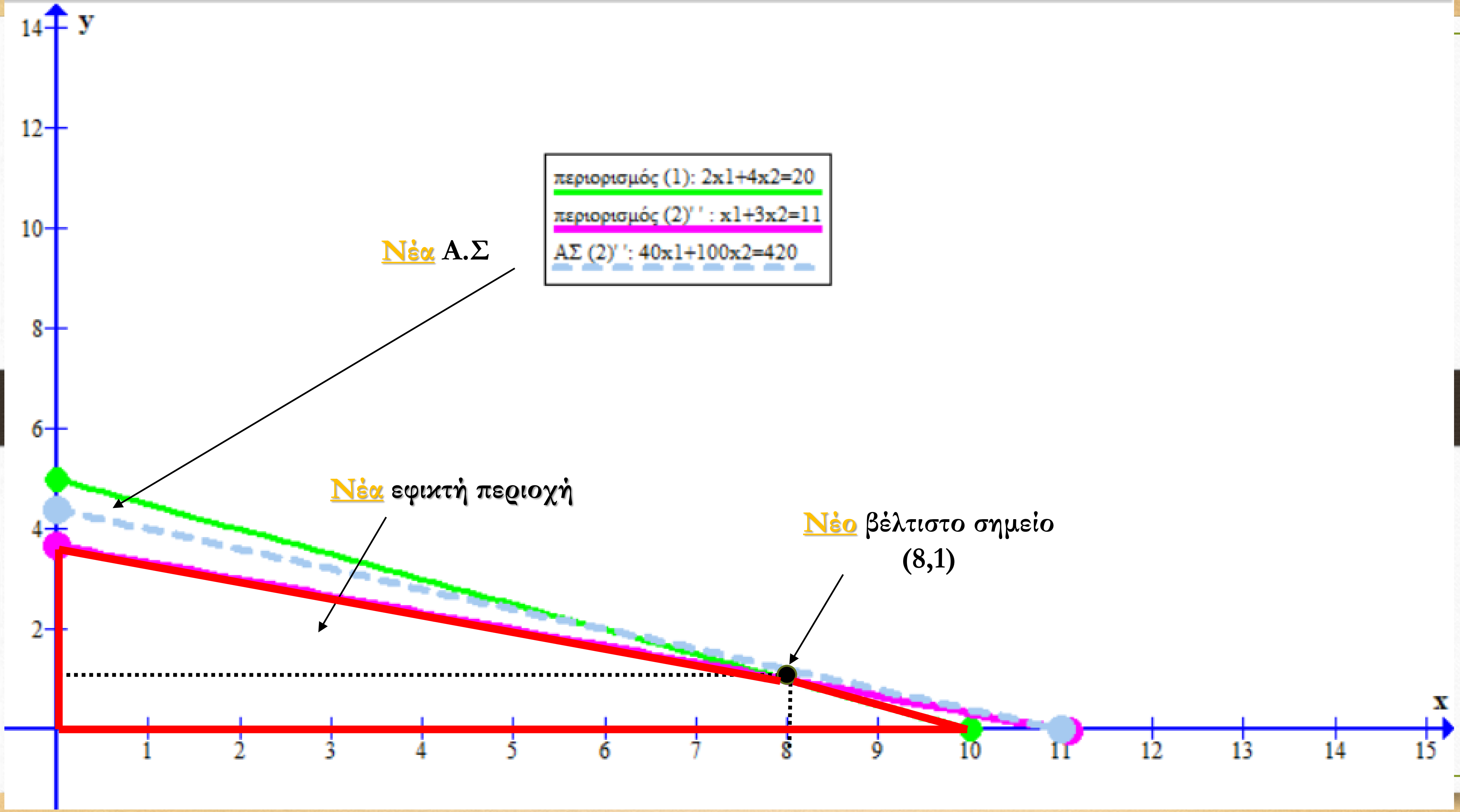
$x_1, x_2 \geq 0$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση : $2 * x_1 + 4 * x_2 = 20$

$x_1 + 3 * x_2 = 11$

Επομένως νέο βέλτιστο σημείο : (x_1=8, x_2=1)

Νέα τιμή Α.Σ.: $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2 =$ **420**

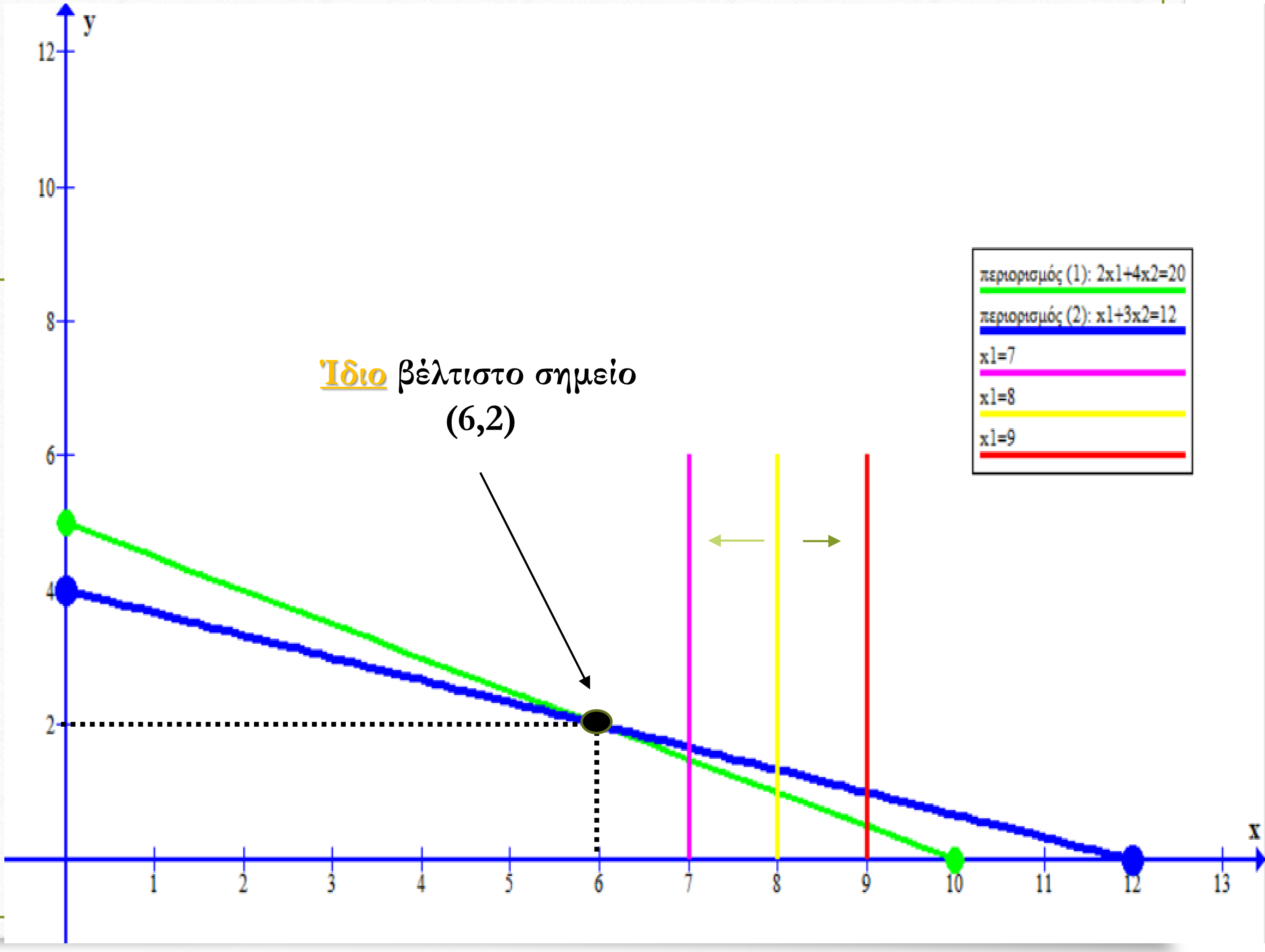

περιορισμός (1): 2x1+4x2=20
περιορισμός (2)' ' : x1+3x2=11
ΑΣ (2)' ': 40x1+100x2=420
Νέα Α.Σ
Νέα εφικτή περιοχή
Νέο βέλτιστο σημείο
(8,1)
y
x
14
12
10
8
6
4
2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Μεταβολές του μη-δεσμευτικού περιορισμού

- Ίδιο βέλτιστο σημείο

  ⇒ίδια τιμή Α.Σ.

- Σκιώδη τιμή=0



Ταυτοχρονες μεταβολες

- **Μείωση (οριακή)** των ωρών λειτουργίας και των δύο μηχανημάτων Α και Β
- $max\Pi = 40 * x_1 + 100 * x_2$

s.t. $2 * x_1 + 4 * x_2 \leq 20 \quad \Rightarrow \quad 2 * x_1 + 4 * x_2 \leq \mathbf{19}$

$x_1 + 3 * x_2 \leq 12 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3 * x_2 \leq \mathbf{11}$

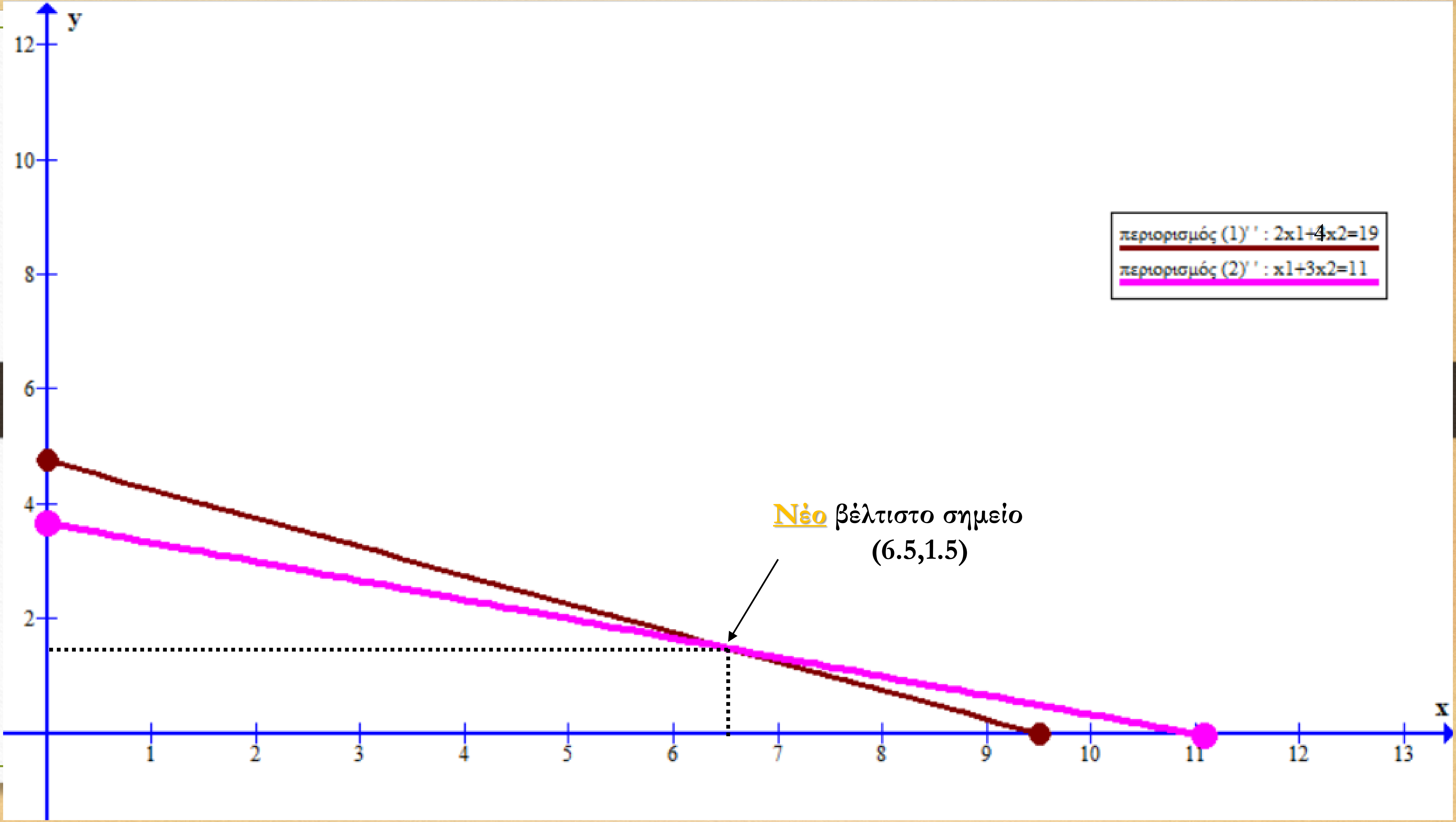
$x_1, x_2 \geq 0$

- Νέο σύστημα εξισώσεων προς επίλυση : $2 * x_1 + 4 * x_2 = 19$

$x_1 + 3 * x_2 = 11$

Επομένως νέο βέλτιστο σημείο : (x_1=6.5, x_2=1.5)

- **Αδυναμία υπολογισμού Σκιώδους τιμής. Γιατί;**


περιορισμός (1)' ' : 2x1+4x2=19
περιορισμός (2)' ' : x1+3x2=11
Νέο βέλτιστο σημείο
(6.5,1.5)
y
x
12
10
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13