ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2020-21

Νίκος Ρήγας
nrigas@upnet.gr

6/4/2021

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

- **ΠΡΩΤΟ ΒΗΜΑ:** Με βάση τα στοιχεία που δίνονται από την εκφώνηση προχωράμε στην επιλογή των μεταβλητών (decision variables). Δηλαδή τα χ1 και χ2 που αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες που αφορούν τα αγαθά 1 και 2.
- **ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΗΜΑ:** Κατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης (objective function) από την οποία θα προκύπτει ο υπολογισμός του μέγιστου (ή του ελάχιστου). Λαμβάνει την μορφή: maxΠ=5χ1+4χ2
- **ΤΡΙΤΟ ΒΗΜΑ:** Η διαμόρφωση ενός συνόλου περιορισμών (constraints) που έχουν να κάνουν με την διαθεσιμότητα του κάθε τύπου μηχανής (ή ωρών εργασίας των εργαζομένων κλπ)

1η άσκηση

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

Αντικειμενική συνάρτηση: $maxZ=6\chi_1+5\chi_2$

Περιορισμοί: $8\chi_1+11\chi_2 \leq 28$

$4\chi_1+3\chi_2 \leq 8$

$\chi_1, \chi_2 \geq 0$ {περιορισμοί μη-αρνητικότητας(non-negativity constraints)}

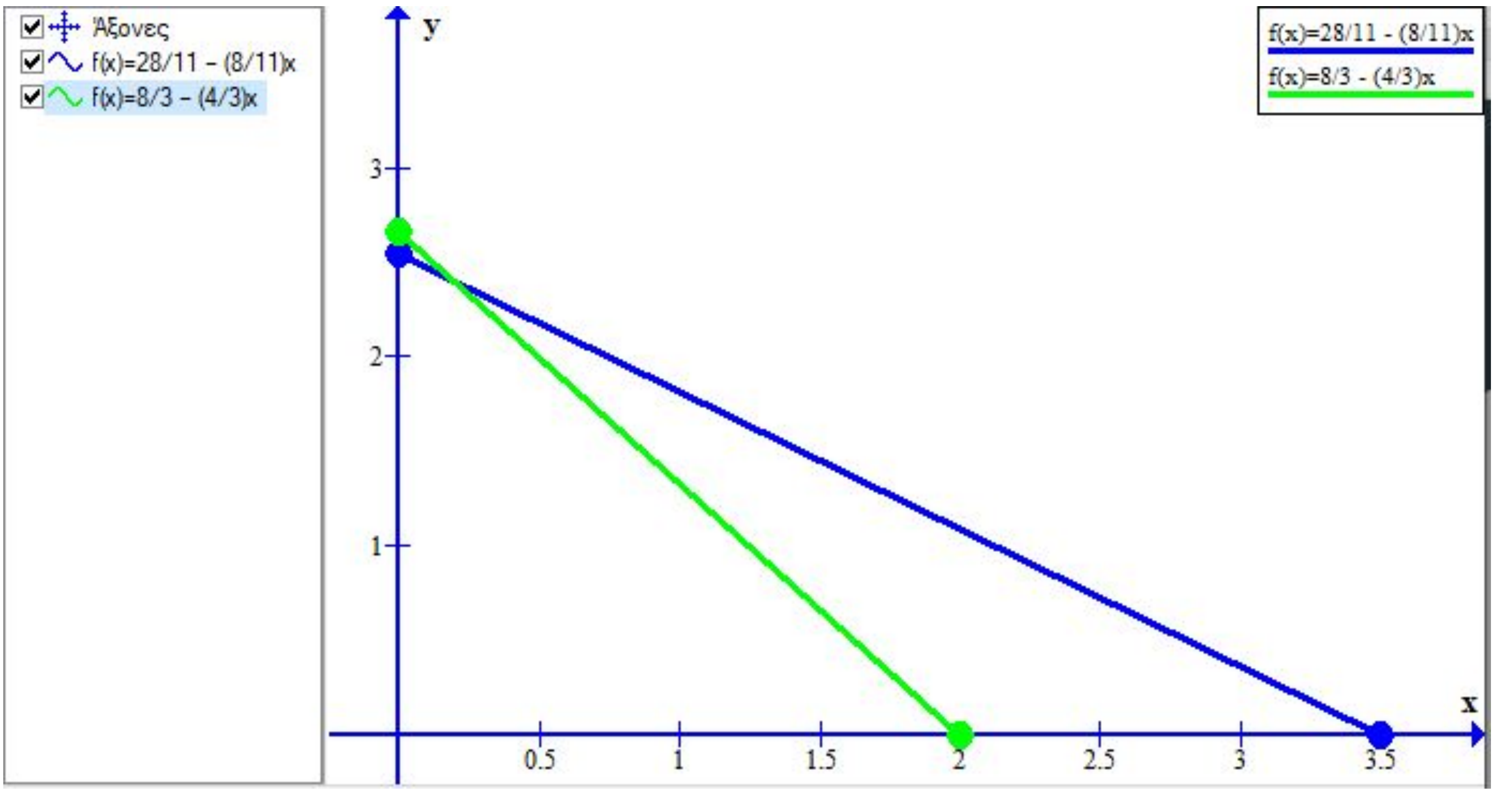
Για να φτιάξουμε την γραφική απεικόνιση του προβλήματος ξεκινάμε αγνοώντας τις ανισότητες.

$8\chi_1+11\chi_2 = 28 \Rightarrow 11\chi_2 = 28-8\chi_1 \Rightarrow \chi_2 = 28/11-(8/11)\chi_1$

$4\chi_1+3\chi_2 = 8 \Rightarrow 3\chi_2 = 8-4\chi_1 \Rightarrow \chi_2 = 8/3 - (4/3)\chi_1$

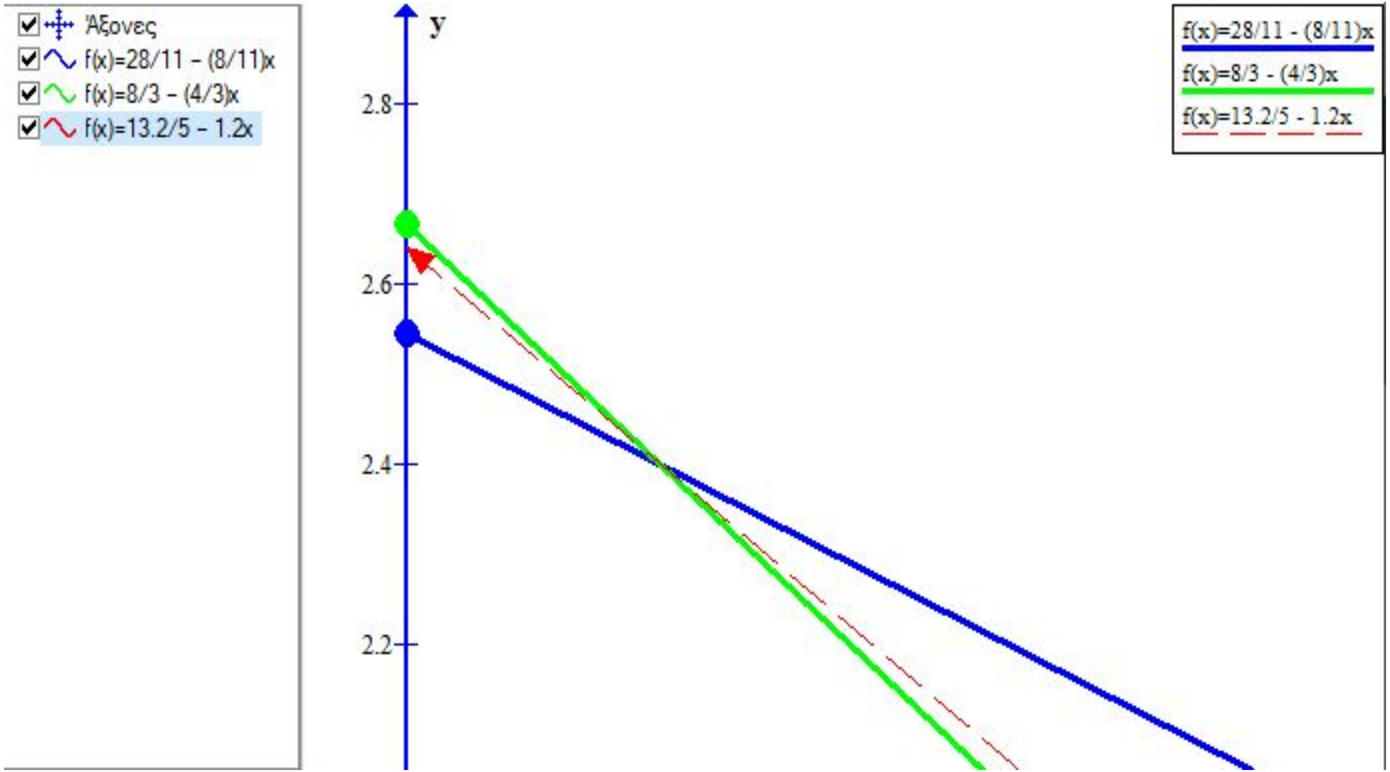
Από αυτές τις 2 ευθείες σχηματίζεται η εφικτή περιοχή. Βρίσκεται κάτω από τους περιορισμούς. Για να υπολογίσουμε το γωνιακό σημείο λύνουμε ταυτόχρονα το σύστημα των περιορισμών

$\chi_1 = 0,2$ & $\chi_2 =2,4$


Άξονες
f(x)=28/11 – (8/11)x
f(x)=8/3 – (4/3)x
y
3
2
1
x
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
f(x)=28/11 - (8/11)x
f(x)=8/3 - (4/3)x

Αντικειμενική συνάρτηση: $maxZ=6χ_1+5χ_2 = 6*0,2+5*2,4=13,2$

Άρα, $13,2=6χ_1+5χ_2 \Rightarrow χ_2=(13,2/5)-1,2χ_1$



Μια επιχείρηση λαμβάνει 20 ευρώ για κάθε βιβλίο που πουλάει και 18 ευρώ για κάθε τετράδιο. Το κόστος παραγωγής είναι 5 & 4 ευρώ αντίστοιχα. Το μηνιαίο κόστος (υπολογισμένο σε 30 μέρες) δεν πρέπει να ξεπερνά τα 27000 ευρώ. Ο κεφαλαιουχικός εξοπλισμός της επιχείρησης επιτρέπει να μπορεί να κατασκευαστεί ένα βιβλίο σε 5’ και ένα τετράδιο σε 15’. Να υπολογίσετε πόσα βιβλία και πόσα τετράδια θα πρέπει να κατασκευάσει η επιχείρηση για να μεγιστοποιήσει τις πωλήσεις και υπολογίστε το μέγιστο κέρδος που προκύπτει σε περίοδο 30 ημερών

Θα θεωρήσουμε πως τα βιβλία είναι η μεταβλητή $χ_1$ και τα τετράδια η μεταβλητή $χ_2$. Η **αντικειμενική Συνάρτηση** είναι: $\max Z= 20χ_1+18χ_2$

	Βιβλία	Τετράδια
Πωλήσεις	20	18
Κόστος	5	4
Χρόνος	5	15

Περιοριστικές Συνθήκες

$5χ_1+4χ_2\leq 27000$

Μετατροπή των 30 ημερών σε λεπτά!

$5χ_1+15χ_2\leq 43200$

Δεν ξεχνάμε: $χ_1 , χ_2 \geq 0$

$5χ_1+4χ_2\leq 27000 \Rightarrow χ_2=27000/4 -(5/4)χ_1$

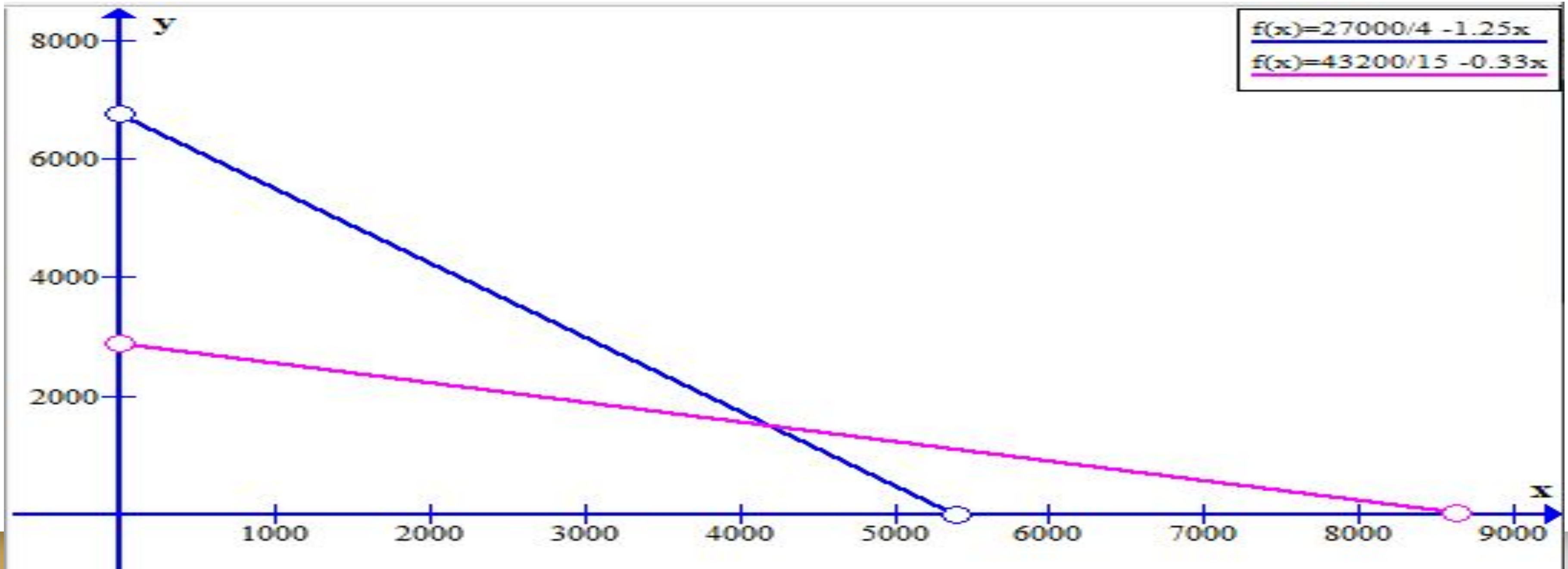
$5χ_1+15χ_2\leq 43200 \Rightarrow χ_2=43200/15 -(1/3)χ_1$

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του γωνιακού σημείου που αποτελεί λύση ενος Π.Γ.Π.

χ_1=4222 & χ_2=1473. Ο συνδυασμός αυτός μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

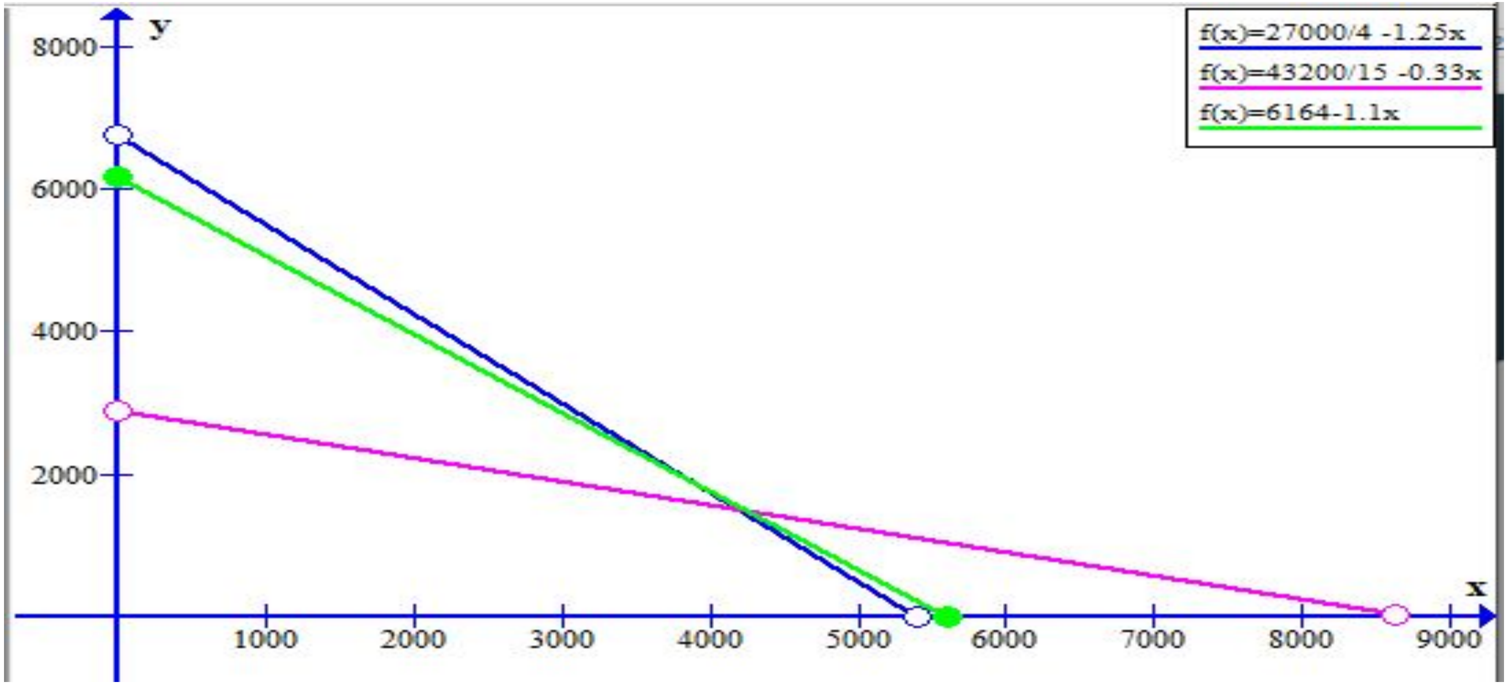
maxZ= 20*4222+18*1473=110954

Κέρδος = Πωλήσεις-Κόστος = 110954 - 27000 = 83934



Για να βρούμε την καμπύλη της αντικειμενικής συνάρτησης:

$maxZ=110954 \Rightarrow 20\chi_1+18\chi_2=110954 \Rightarrow \chi_2= 6164-1{,}1\chi_1$



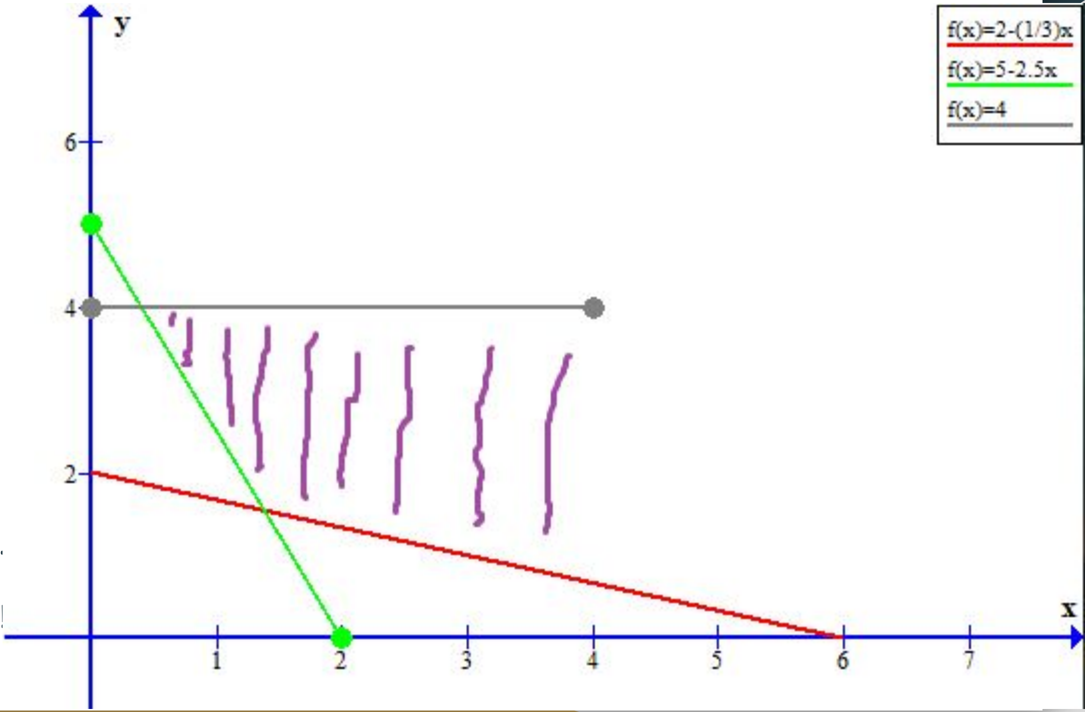
3η άσκηση

minZ=5X+7Y

X+3Y ≥ 6 | 5X+2Y ≥ 10 | Y ≤ 4 | X, Y ≥ 0

X	Y
0	2
6	0

X	Y
0	5
2	0



Η μωβ περιοχή δείχνει όλα τα σημεία που

ικανοποιούν τους περιορισμούς και την

ονομάζουμε εφικτή περιοχή. Η βέλτιστη λύση

μπορεί να επιτευχθεί στα γωνιακά ή ακραία σημεία.

Σκοπός είναι ελαχ/ουμε την αντικειμενική συνθήκη!

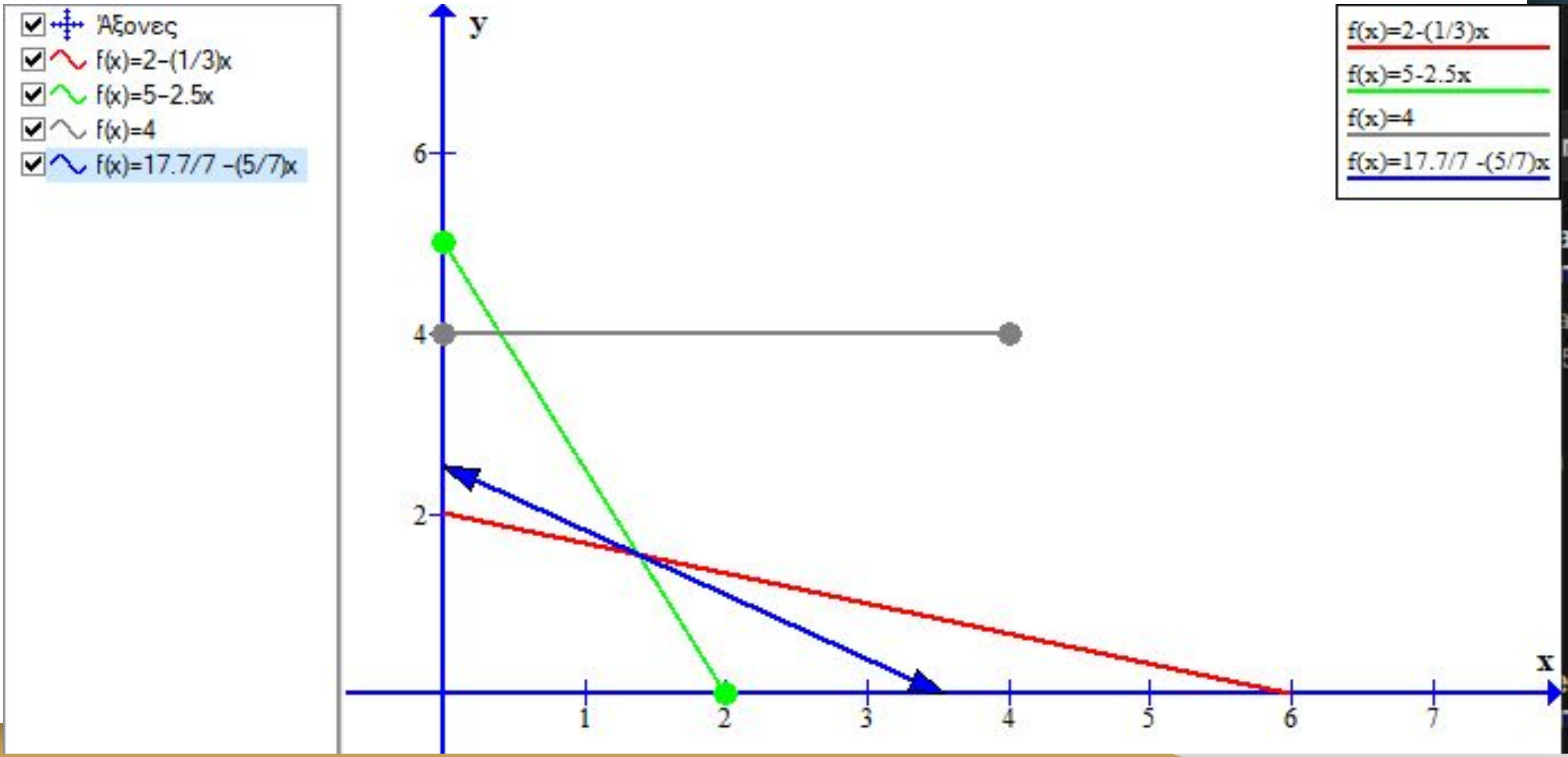
$X+3Y = 6 \quad | \quad X = 1,38$

$5X+2Y = 10 \quad | \quad Y = 1,54$

$\Rightarrow$ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΛΥΣΗ

$minZ=5X+7Y \Rightarrow minZ = 5*(1,38)+7*(1,54) \Rightarrow minZ = 17,7$

$5X+7Y=17,7$



Επιπλοποιός εισπράττει 90 ευρώ για κάθε τραπέζι που πουλάει και 180 ευρώ για κάθε καρέκλα. Χρειάζεται 5 ώρες για να φτιάξει την καρέκλα και 2 ώρες για το τραπέζι. Ο χρόνος του είναι μέχρι 40 ώρες την εβδομάδα. Το κόστος για κάθε τραπέζι είναι 15 ευρώ και 45 ευρώ για κάθε καρέκλα. Επιθυμεί να κρατήσει το κόστος κατασκευής το ανώτερο μέχρι 315 ευρώ τη βδομάδα. Πόσα τραπέζια και καρέκλες πρέπει να φτιάχνει για να μεγιστοποιήσει τις πωλήσεις του;

	T	K
Τιμή	90	180
Χρόνος	2	5
Κόστος	15	45

Αντικειμενική Συνάρτηση

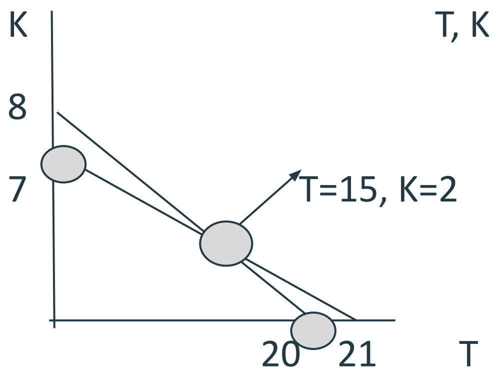
maxZ=90T+180K

Συνθήκες Περιορισμού

$2T+5K \leq 40$

$15T+45K \leq 315$

$T, K \geq 0$



Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων που αποτελούν τις συνθήκες περιορισμού(αγνοούμε την ανισότητα) βρίσκουμε τα σημεία επαφής με τους άξονες.

Μας ενδιαφέρουν 3 σημεία να ελέγξουμε.

T	K	Πωλήσεις
0	7	1260
20	0	1800
15	2	1710

maxZ=90T+180K

Ένας διαιτολόγος προετοιμάζει ένα μενού από κοτόπουλο και ρύζι, έτσι ώστε κάθε γεύμα να περιέχει τουλάχιστον 30 γρ. πρωτεΐνη, 5 γρ. σίδηρο και 40γρ. άμυλο. Κάθε δόση κοτόπουλο περιέχει 10 γρ. πρωτεΐνη, 5 γρ. σίδηρο και 20γρ. λίπος. Κάθε δόση ρύζι περιέχει 2 γρ. πρωτεΐνη, 10 γρ. άμυλο και 15 γρ. λίπος. Πόσες δόσεις ρύζι και κοτόπουλο πρέπει να περιέχει το μενού ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα λίπους;

	Κοτόπουλο	Ρύζι	
Πρωτεινη	10	2	≥30
Σίδηρο	5	0	≥5
Άμυλο	0	10	≥40
Λίπος	20	15	

χ_1 = πλήθος δόσεων κοτόπουλου/μενού

χ_2 = πλήθος δόσεων ρυζιού/μενού

Αντικειμενική Συν. : $\min Z=20\chi_1 + 15\chi_2$

<u>Περιορισμοί</u> ⇓

$10\chi_1 + 2\chi_2 \geq 30$

$5\chi_1 \geq 5$

$10\chi_2 \geq 40$

$\chi_1, \chi_2 \geq 0$

Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων

$10\chi_2 = 40 \Rightarrow \chi_2 = 4$ A(2.2,4)

$10\chi_1 + 2\chi_2 = 30 \Rightarrow \chi_1 = 2,2$

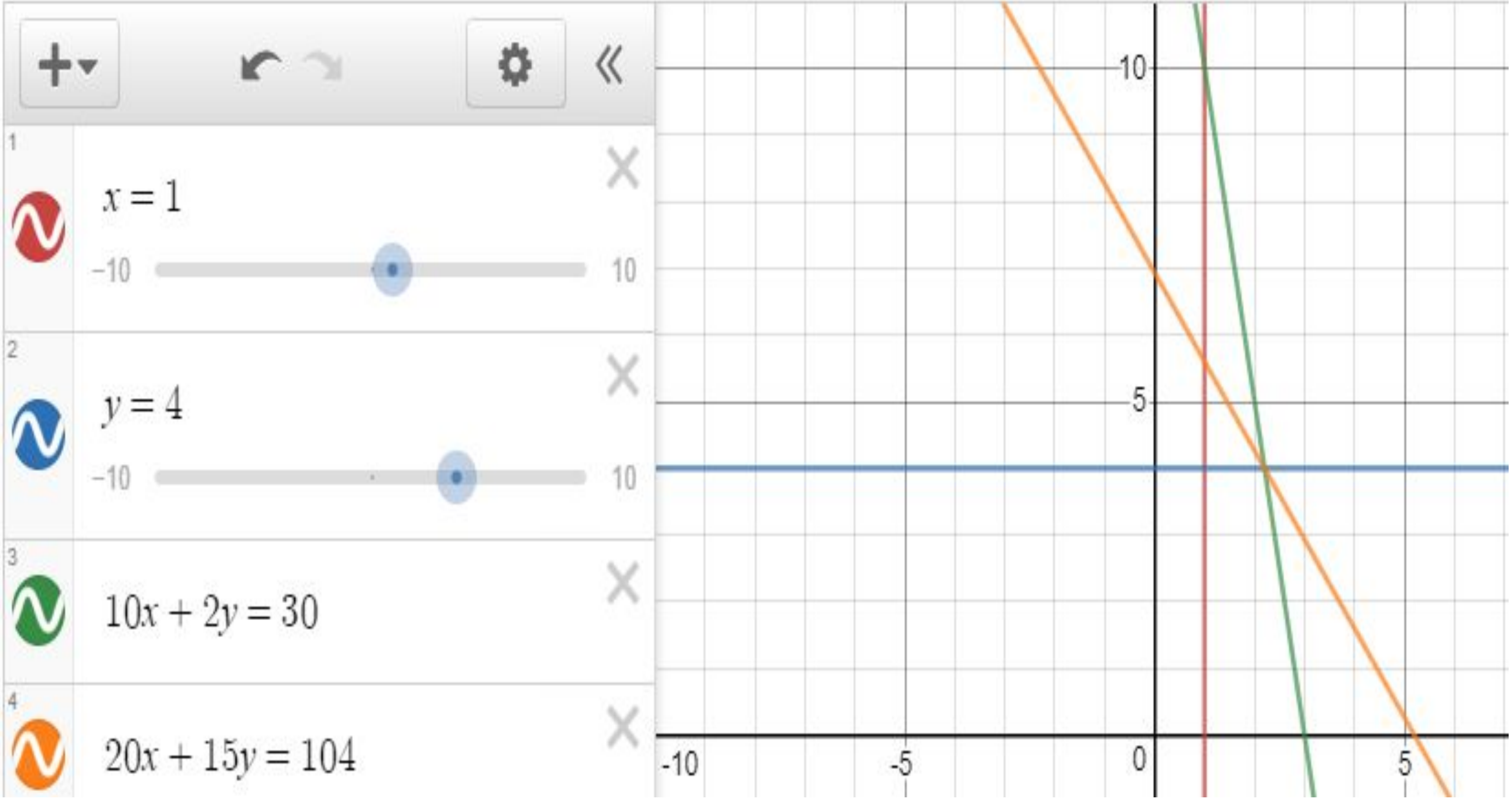
$5\chi_1 = 5 \Rightarrow \chi_1 =1$ B(1,10)

$10\chi_1 + 2\chi_2 = 30 \Rightarrow \chi_2 =10$

Z(A)=Z((2.2,4)) =44+60=104

Z(B)=Z((1,10)) =20+150=170

*** Το τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής που ανήκει ταυτόχρονα και στην ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης, πριν αυτή εγκαταλείψει την εφικτή περιοχή, είναι η βέλτιστη λύση.


1
x = 1
−10
10
2
y = 4
−10
10
3
10x + 2y = 30
4
20x + 15y = 104
10
5
-10
-5
0
5

Μια εταιρεία κατασκευάζει φωτογραφικές μηχανές με κόστος 100 ευρώ ανά μηχανή και φλας με 40 ευρώ ανά μονάδα. Τα έσοδα από κάθε φωτογραφική είναι 160 ευρώ ενώ από κάθε φλας 90 ευρώ. Η εταιρεία κατασκευάζει συνολικά έως 120 κομμάτια τη μέρα, με ανώτατο όριο του κόστους παραγωγής 6000 ευρώ τη μέρα. Ζητείται το βέλτιστο μέγεθος παραγωγής ώστε να μεγιστοποιείται το ημερήσιο κέρδος.

X: αριθμός Φωτογραφικών μηχανών που κατασκευάζει η εταιρεία

Y: αριθμός φλας που κατασκευάζει η εταιρεία

	Κόστος	Έσοδα
X	100	160
Y	40	90

<u>Αντικειμενική Συνάρτηση</u>: $\max\Pi = (160-100)X+(90-40)Y$

<u>Συνθήκες Περιορισμού</u>: $100X+40Y \leq 6000$

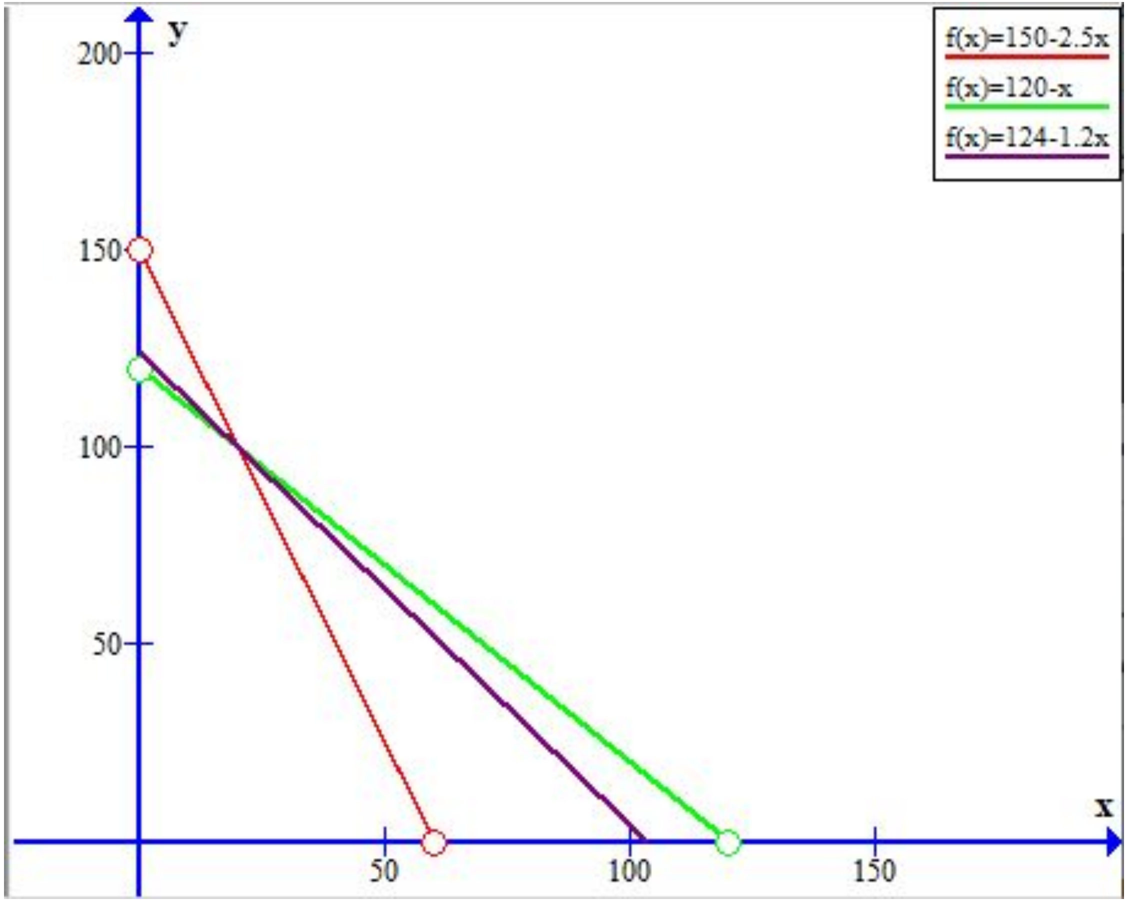
$X + Y \leq 120$

<u>Εύρεση σημείων</u>:

$100X+40Y = 6000 \Rightarrow \ldots \Rightarrow X=20$

$X + Y = 120 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow Y=100$

$\max\Pi = 60X+50Y = 60*20 + 50*100=6200$ || $\max\Pi=6200 \Rightarrow 60X+50Y=6200 \Rightarrow 6X+5Y=620$


f(x)=150-2.5x
f(x)=120-x
f(x)=124-1.2x
y
x
200
150
100
50
50
100
150

Για την παραπάνω εκφώνηση, τι θα συμβεί αν η εταιρεία αποφασίσει να αυξήσει τα κομμάτια που κατασκευάζει ανά ημέρα σε 121; Ποια η οριακή χρησιμότητα;

θα εξετάσουμε αν η οριακή μεταβολή των κομματιών που κατασκευάζει (αύξηση κατά 1)θα επιφέρει ή όχι αλλαγές στη βέλτιστη λύση. Λύνουμε εκ νέου το σύστημα των περιορισμών (στην μορφή των ισοτήτων)

$100X+40Y = 6000 \Rightarrow \dots \Rightarrow X'=19$

$X + Y = 121 \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow Y'=102$ Άρα η βέλτιστη λύση άλλαξε !! Μαζί της αλλάζει και η εφικτή περιοχή

$\Delta X = 19-20 = -1$

$\Delta Y = 102-100 = 2$

Το νέο γωνιακό σημείο φέρνει αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση ίση με:
$\Pi=60*\Delta X+50*\Delta Y=60*(-1)+50*2=40 >0$

$\Pi'=60X'+50Y'=60*19+50*102=6240$ (Π=6200, σελ/14)

Άρα από την αύξηση των κομματιών που κατασκευάζει η εταιρεία κάθε μέρα, προκύπτει μία αύξηση του ημερήσιου κέρδους κατά 40 ευρώ. Η ποσότητα αυτή καλείται σκιώδης τιμή και αποτελεί τη μεταβολη στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από μια μοναδιαία μεταβολή στο δεξί μέλος κάποιου από το σύνολο των περιορισμών. Αναπαριστά την οριακή χρησιμότητα που προκύπτει από την χαλάρωση του περιορισμού.

Τι θα συμβεί αν η εταιρεία αποφασίσει να μειώσει τα κομμάτια που κατασκευάζει ανά ημέρα σε 119;

$100X+40Y = 6000 \Rightarrow . . . . \Rightarrow X''=21$

$X + Y = 119 \Rightarrow . . . . \Rightarrow Y''=98$

$\Delta X= X'' - X = 21-20=1$

$\Delta Y= Y''- Y = 98-100= -2$

Το νέο γωνιακό σημείο φέρνει αλλαγή στην αντικειμενική συνάρτηση ίση με:
$\Pi=60*\Delta X+50*\Delta Y=60*1+50*(-2)=-40 <0$

$\Pi''=60X''+50Y''=60*21+50*98=6160$ (Π=6200, σελ/14)

Στην περίπτωση περιορισμού των κομματιών παραγωγής ανά ημέρα (από 120 σε 119), το κέρδος της επιχείρησης μειώνεται κατά 40 ευρώ