ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2020-21

Νίκος Ρήγας
nrigas@upnet.gr

13/4/2021

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένας αγρότης βρίσκει στην αγορά 2 είδη τροφής για τα ζώα του. Γνωρίζει ότι αυτά χρειάζονται τουλάχιστον 60, 84 & 72 μονάδες από τα θρεπτικά συστατικά Α, Β & Γ αντίστοιχα, τη μέρα. Ο πίνακας συνοψίζει την περιεκτικότητα σε θρεπτικά συστατικά και το κόστος κάθε τροφής.

	Α	Β	Γ	Κόστος
Τροφή1	3	7	3	3
Τροφή2	2	2	6	1,2

Ο αγρότης επιθυμεί να εκτιμήσει ποιες είναι οι καθημερινές ποσότητες από κάθε είδος τροφής που ελαχιστοποιούν το ημερήσιο κόστος τροφής και ταυτόχρονα εξασφαλίζουν ότι τα ζώα παίρνουν τις απαιτούμενες ποσότητες θρεπτικών συστατικών.

$\min Z = 3X + 1{,}2Y$

$3X + 2Y \geq 60$

$7X + 2Y \geq 84$

$3X + 6Y \geq 72$

$X, Y \geq 0$

Μετατρέπουμε τις ανισότητες σε ισοτητες.

3X+2Y = 60

7X+2Y = 84

3X+6Y = 72

X	Y
0	30
0	42
0	12

X	Y
20	0
12	0
24	0

Το πολύγωνο (A, B, C, D) που δημιουργείται πάνω (δεξιά) από όλες τις ευθείες αντιπροσωπεύει την εφικτή περιοχή. Η βέλτιστη λύση θα βρίσκεται σε κάποια από τις κορυφές. Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση θα κάνουμε δοκιμές, βάζοντας συντεταγμένες των σημείων στην αντικειμενική συνάρτηση. Τις συντεταγμένες του B και του Γ τις βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα των 2 ευθειών.

$$\begin{cases} 3X+2Y=60 \\ 7X+2Y=84 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X=6 \\ Y=21 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3X+2Y=60 \\ 3X+6Y=72 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} Y=3 \\ X=18 \end{matrix}$$

Έχουμε τα σημεία A(0, 42) - B(6, 21) - C(18, 3) - D(24, 0)

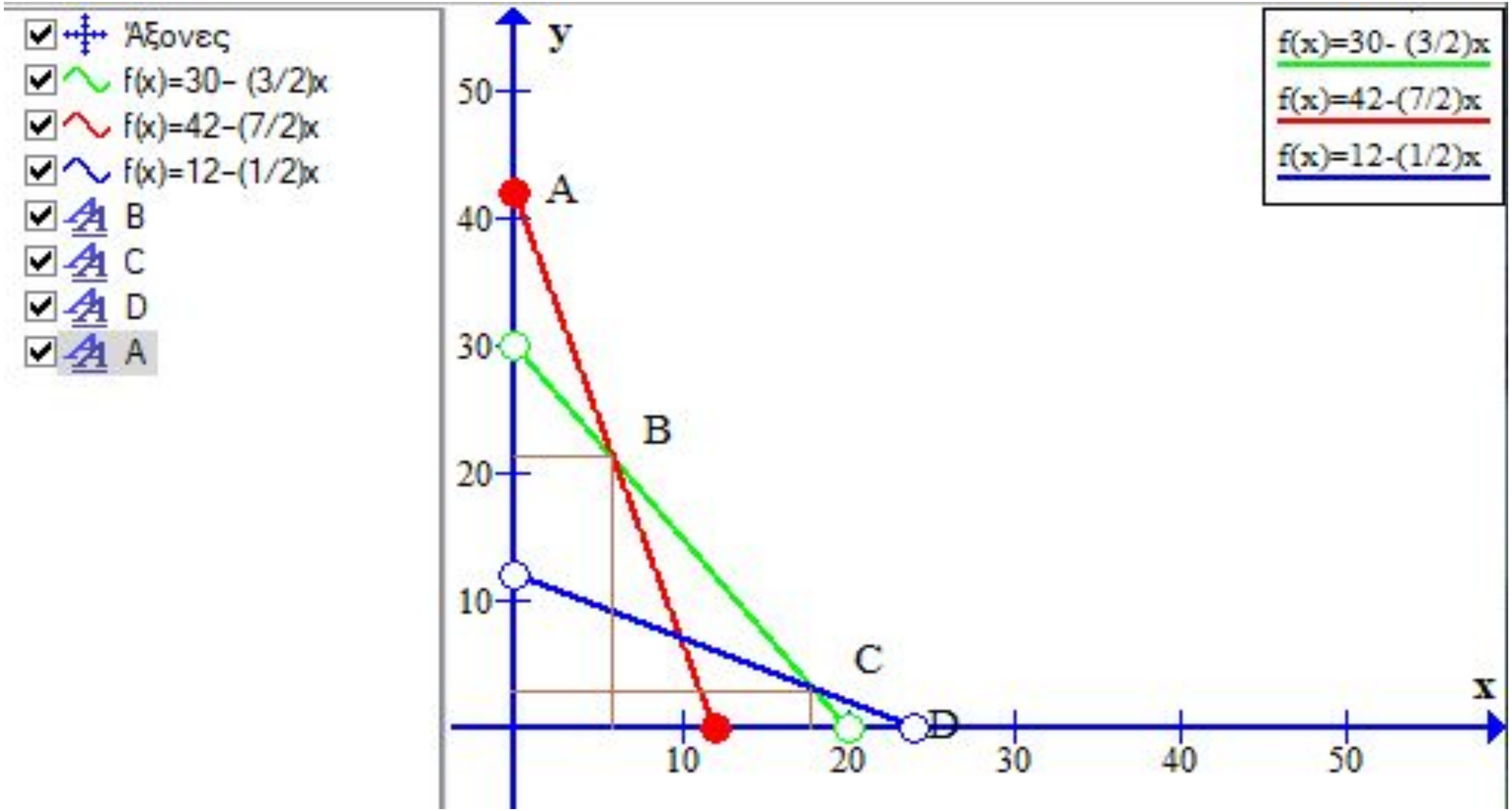
z(A)= 3*0 + 1.2*42 = 50.4

z(B)= 3*6 + 1.2*21 = 43.2

z(C)= 3*18 + 1.2*3 = 57.6

z(D)= 3*24 + 1.2*0 = 72

Άρα το ελάχιστο είναι στο σημείο B και αποτελεί βέλτιστη λύση


Άξονες
f(x)=30- (3/2)x
f(x)=42-(7/2)x
f(x)=12-(1/2)x
B
C
D
A
y
x
A
B
C
D
10
20
30
40
50
10
20
30
40
50
f(x)=30- (3/2)x
f(x)=42-(7/2)x
f(x)=12-(1/2)x

Θα μετατρέψουμε το ίδιο πρόβλημα σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.

maxZ=3X+1,2Y

3X+2Y ≤ 60

7X+2Y ≤ 84

3X+6Y ≤ 72

X,Y ≥ 0

$$\left.\begin{array}{l} 7X+2Y = 84 \\ 3X+6Y = 72 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} X=10 \\ Y=7 \end{array}$$

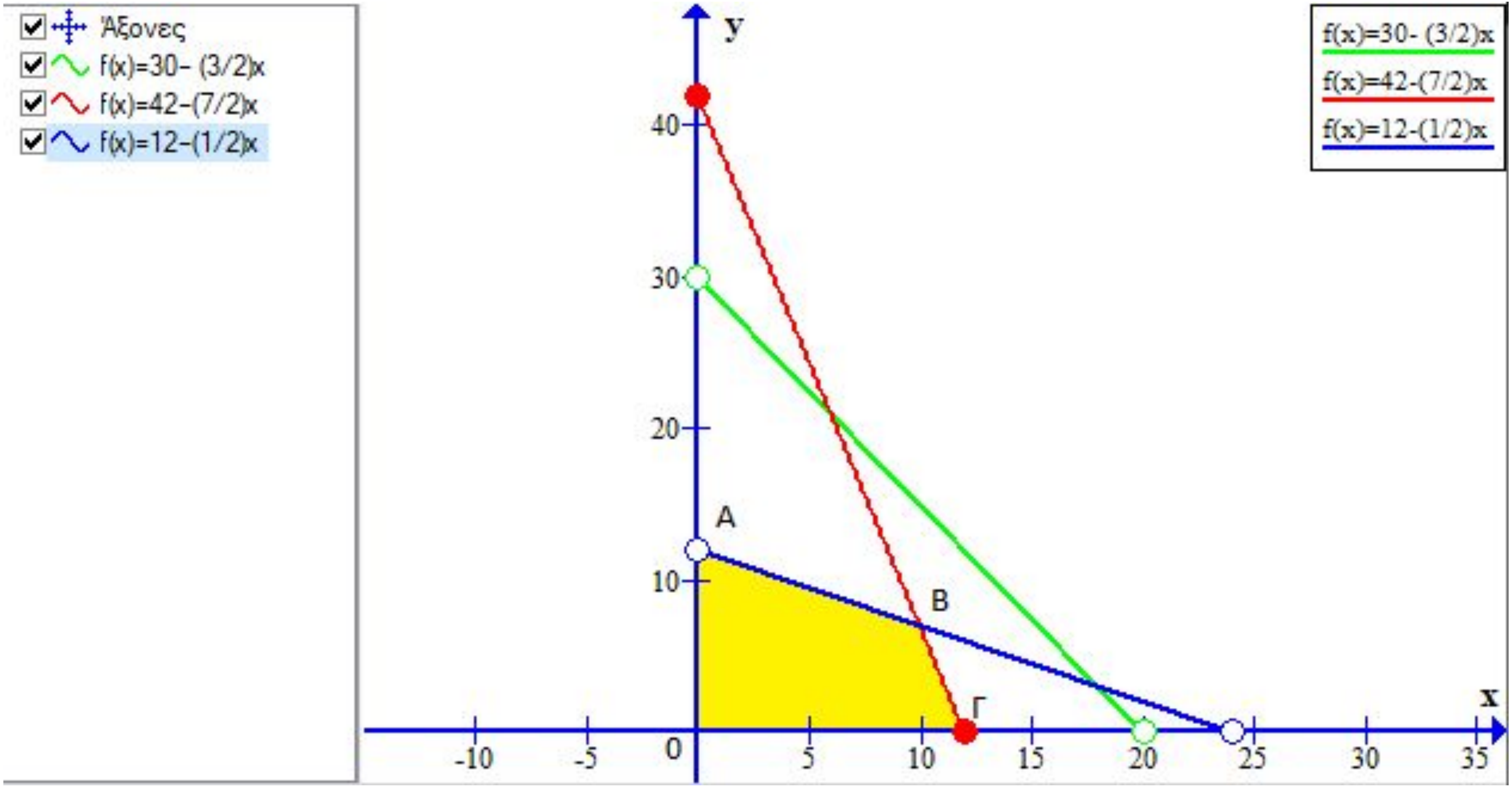
Άρα έχουμε τα σημεία Α(0, 12) - Β(10 ,7) - Γ(12, 0)

Αυτή την φορά θέλουμε το πολύγωνο που βρίσκεται κάτω (αριστερά) από όλες τις ευθείες και οι πιθανές βέλτιστες λύσεις είναι οι κορυφές του πολυγώνου (0ΑΒΓ).

z(A)= 3*0 + 1.2*12 = 14.4

z(B)= 3*10 + 1.2*7 = 38.4

z(C)= 3*12 + 1.2*0 = 36



Άξονες
f(x)=30- (3/2)x
f(x)=42-(7/2)x
f(x)=12-(1/2)x
y
x
A
B
Γ
0
40
30
20
10
-10
-5
5
10
15
20
25
30
35
f(x)=30- (3/2)x
f(x)=42-(7/2)x
f(x)=12-(1/2)x

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε ένα ξυλουργείο υπάρχουν 2 εργαλεία, ένα τρυπάνη και μια πλάνη. Το ξυλουργείο κατασκευάζει 2 προιόντα Α & Β, που κάθε μονάδα των οποίων απαιτεί χρόνο και από τα εργαλεία όπως δίνεται στον πίνακα:

	Τ	Π
Α	2	3
Β	6	4

Ο ξυλουργός επιθυμεί να δουλεύει το τρυπάνι περισσότερο από την πλάνη αλλά μόνο 20 λεπτά σε σύγκριση με την πλάνη. Επίσης επιθυμεί να δουλεύει για την κατασκευή των 2 προϊόντων το πολύ 5 ώρες ημερησίως. Αν το κέρδος του είναι 25 ευρώ ημερησίως για κάθε μονάδα Α και 30 ευρώ για κάθε μονάδα, να βρεθούν με γραφική επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, οι ποσότητες των Α και Β που πρέπει να κατασκευάζει ώστε να μεγιστοποιεί το κέρδος του.

Αντικειμενική συνάρτηση:

maxZ=25A+30B

θα πρέπει να υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς:

2A+6B ≤ ?

3A+4B ≤ ?

5 ώρες = 300 λεπτά

$$\left.\begin{array}{l} T+\Pi \leq 300 \\ T \leq \Pi+20 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T+\Pi=300 \\ T-\Pi=20 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} T = 160 \\ \Pi = 140 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A+6B \leq 160 \\ 3A+4B \leq 140 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} A = 20 \\ B = 20 \end{array}$$

Z = 25A+30B => Z=25*20+30*20=1100 => 1100=25A+30B

	Product 1	Product 2	Daily Availability
Machine 1	2 hours	1 hour	8 hours
Machine 2	1 hour	2 hours	8 hours
Unit Profit	$300	$200	

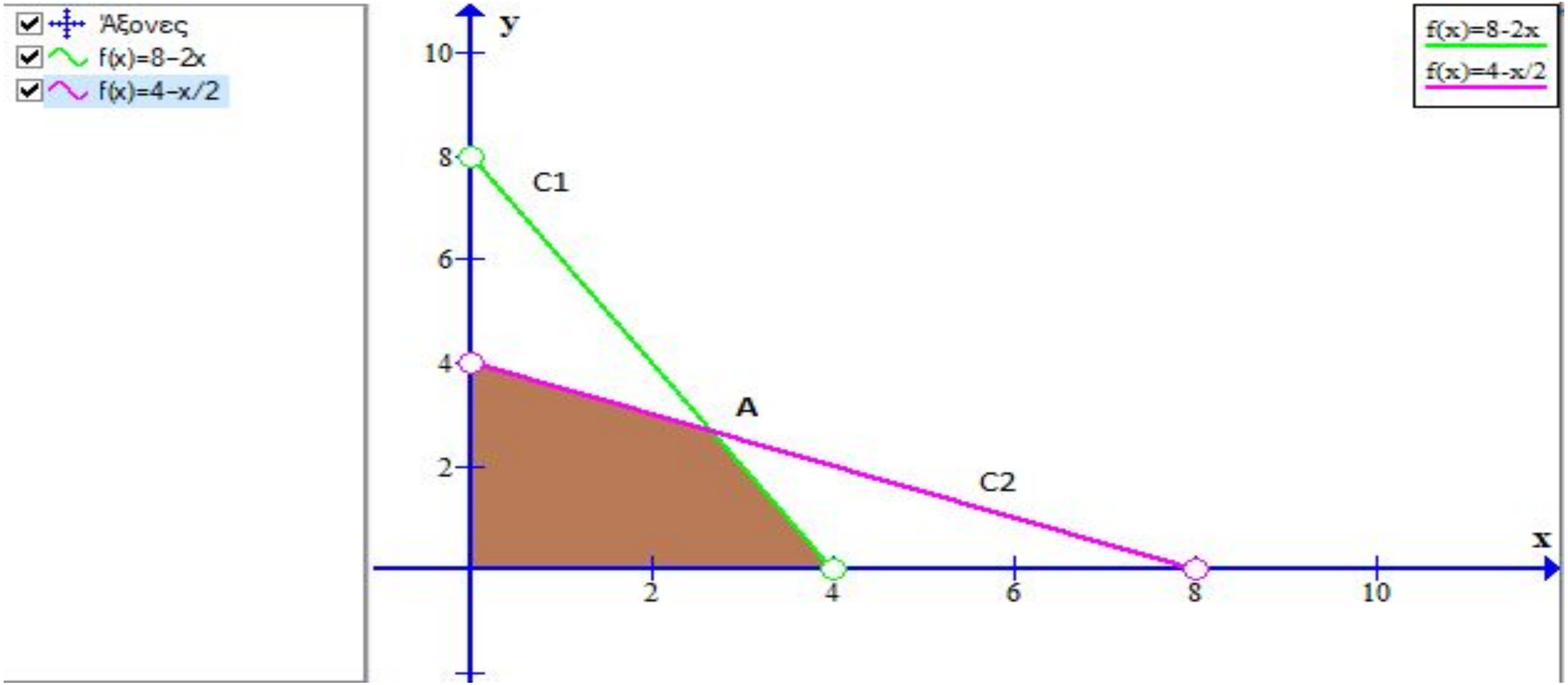
max Z = 300*x1+200*x2

s.t. 2*x1+x2 ≤ 8 (C1)

x1+2*x2 ≤ 8 (C2)

x1, x2 ≥ 0

Σημείο Α(8/3, 8/3) -> Βέλτιστη Λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτό το σημείο:



Τι αλλάζει αν για την μηχανή 1 αυξήσουμε τις διαθέσιμες ώρες λειτουργίας της κατά 1?

max Z = 300*x1+200*x2

s.t. 2*x1+x2 ≤ 9 (C1’)

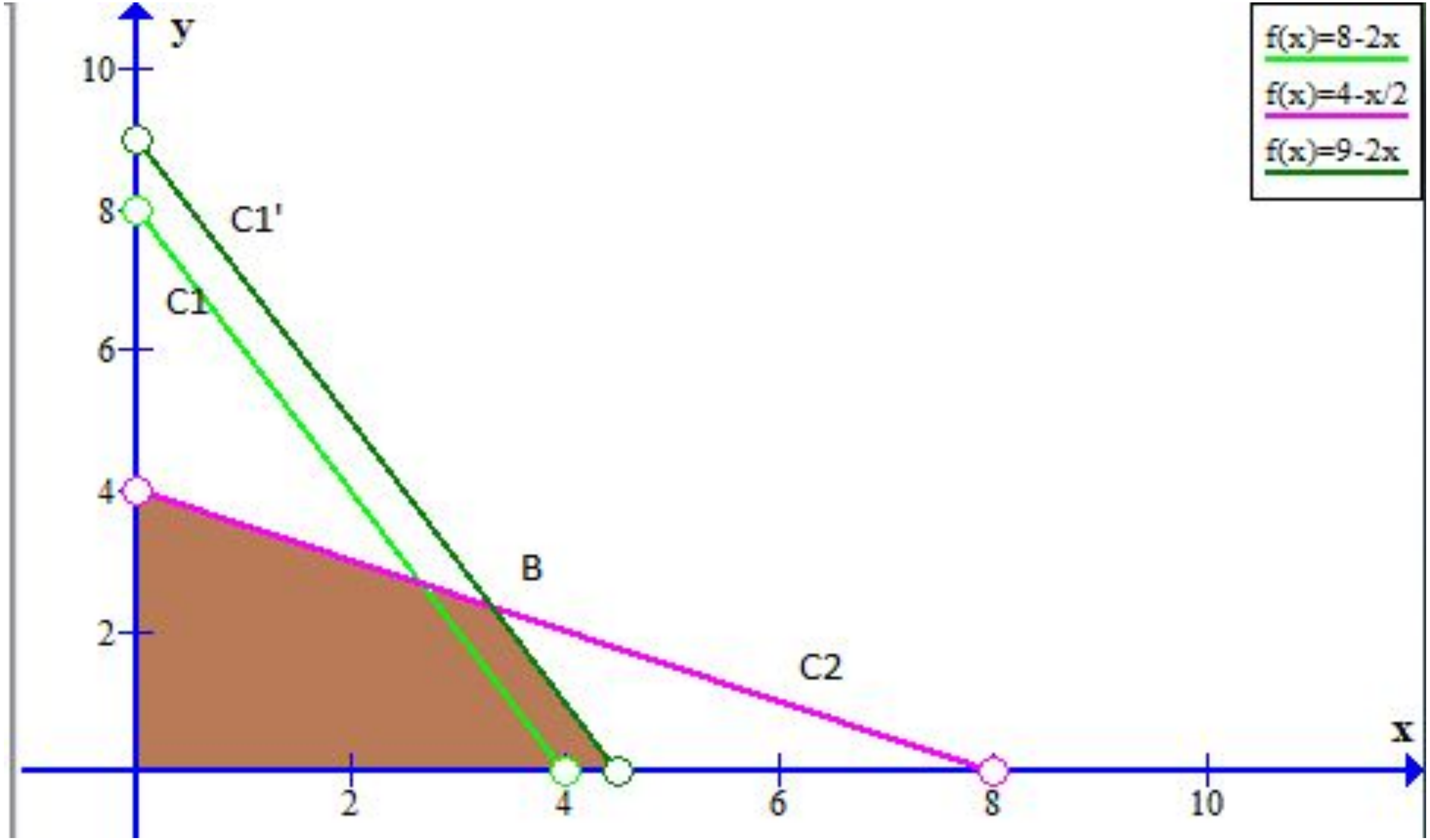
x1+2*x2 ≤ 8 (C2)

x1, x2 ≥ 0

Η περιοριστική γραμμή C1 θα αλλάξει και θα γίνει C1’. Μαζί αλλάζει και η βέλτιστη λύση που θα είναι ένα νέο σημείο. Λύνοντας το σύστημα των 2 εξισώσεων που προκύπτουν από τους 2 περιορισμούς το καινούργιο βέλτιστο σημείο είναι B(10/3, 7/3). Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτό το σημείο:

Z(B) = 300*(10/3)+ 200*(7/3) = 4400/3

4400/3-4000/3=400/3= 133$ Το οποίο σημαίνει ότι μία ώρα αύξηση στις ώρες λειτουργίας της μηχανής 1, προσφέρει 133$ περισσότερο κέρδος



y
x
10
8
6
4
2
2
4
6
8
10
C1'
C1
B
C2
f(x)=8-2x
f(x)=4-x/2
f(x)=9-2x

Τι αλλάζει αν για την μηχανή 2 αυξήσουμε τις διαθέσιμες ώρες λειτουργίας της κατά 1?

max Z = 300*x1+200*x2

s.t. $\quad 2*x1+x2 \leq 8 \quad (C1)$

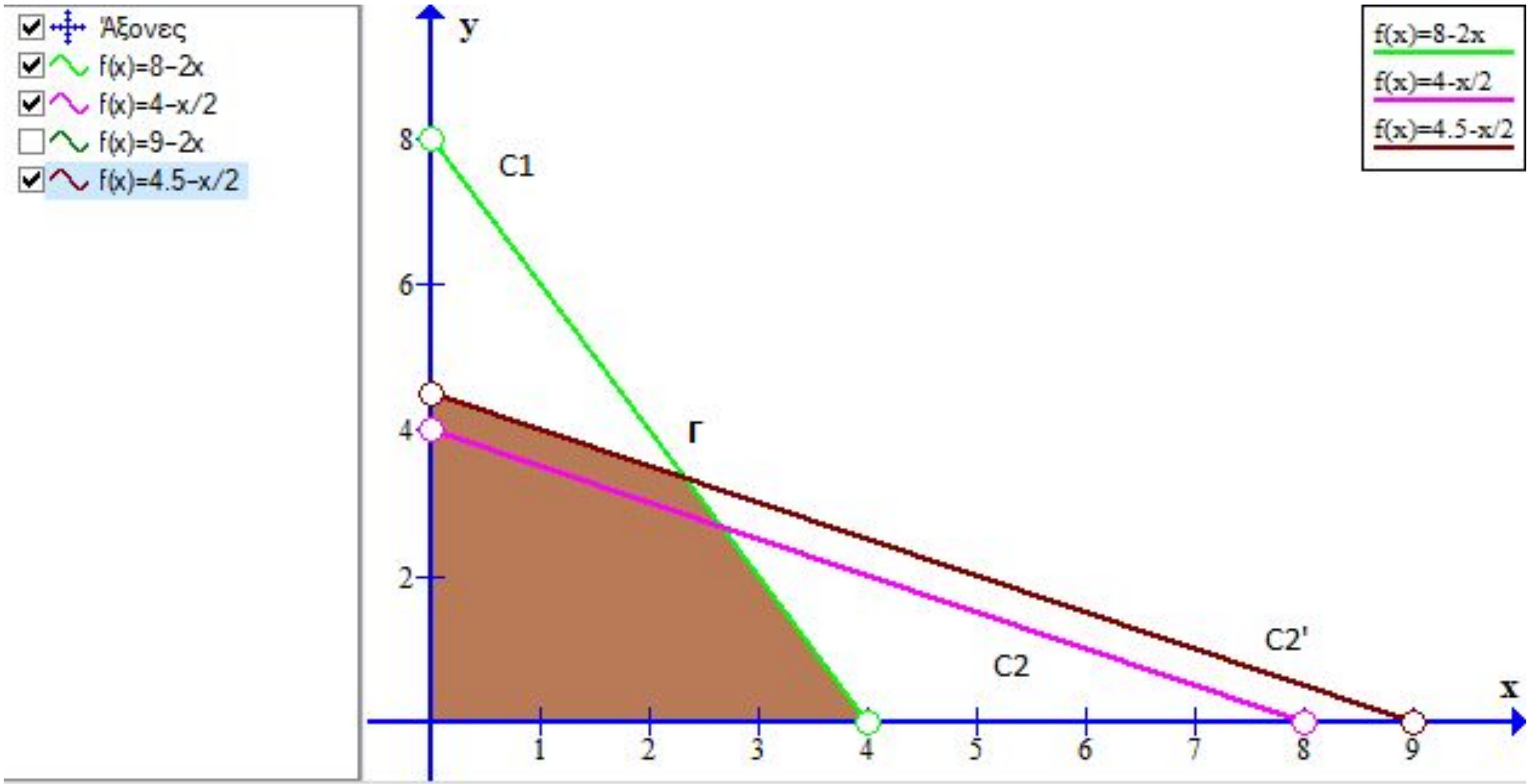
$x1+2*x2 \leq 9 \quad (C2)$

$x1, x2 \geq 0$

Η περιοριστική γραμμή C2 θα αλλάξει και θα γίνει C2’. Μαζί αλλάζει και η βέλτιστη λύση που θα είναι ένα νέο σημείο. Λύνοντας το σύστημα των 2 εξισώσεων που προκύπτουν από τους 2 περιορισμούς το καινούργιο βέλτιστο σημείο είναι Γ(7/3, 10/3). Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτό το σημείο:

Ζ(Γ) = 300*(7/3)+ 200*(10/3) = 4100/3

4100/3-4000/3=100/3= 33$ Το οποίο σημαίνει ότι μία ώρα αύξηση στις ώρες λειτουργίας της μηχανής 2, προσφέρει 33$ περισσότερο κέρδος



Άξονες
f(x)=8−2x
f(x)=4−x/2
f(x)=9−2x
f(x)=4.5−x/2
y
x
C1
C2
C2'
Γ
f(x)=8-2x
f(x)=4-x/2
f(x)=4.5-x/2

Σκιώδης τιμή της C1’= 133$

Σκιώδης τιμή της C2’= 33$

- αν μπορούσαμε να αυξήσουμε τις ώρες λειτουργίας και των 2 μηχανημάτων σε ποιο μηχάνημα θα έπρεπε να δώσουμε μεγαλύτερη προτεραιότητα;
- Θα ήταν σωστό να αυξήσουμε τις ώρες λειτουργίας της μηχανής 1 αν το πρόσθετο κόστος αυτής της κίνησης ήταν 50$/ώρα; Για την μηχανή 2 τι ισχύει;

Η κλίση μιας αντικειμενικής συνάρτησης Z=C1*X1+C2*X2, είναι -C1/C2