ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SIMPLEX

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να επιλύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο βρίσκεται σε τυπική μορφή

$$\max z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$s.t \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 = 12$$

$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU

Οι συντελεστές στην Α.Σ.

		c_j	6	7	0	0	
x_B Βάση	c_B	B	x1	x2	x3	x4	
X3	0	12	2	3	1	0	
X4	0	8	2	1	0	1	
Z							

Εισάγουμε τους συντελεστές τους αντίστοιχους συντελεστές της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην Α.Σ

Εισέρχεται η στήλη b

Στις επόμενες στήλες τοποθετούμε τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών του π.γ.π βρισκόμενο πάντα σε τυπική μορφή

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (2)

Υπολογισμός των κενών θέσεων k_j. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να κάνουμε τον διαχωρισμό και να αναφέρουμε ότι για $k_j,\ j = 1,\ldots,5$ τα στοιχεία αυτά υπολογίζονται ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $c_b * b$.

Τα υπόλοιπα υπολογίζονται με βάση των εξής τύπο $k_j = c_j - c_b * b$. Εάν κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις θα έχουμε ότι ο πίνακάς μας παίρνει την Παρακάτω μορφή:

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (3) ΕΞΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Ορισμός: Καθορίζουμε ως εισερχόμενη στην βάση μεταβλητή την μεταβλητής της οποίας η υπολογισμένη αντίστοιχα τιμή της Α.Σ είναι μεγαλύτερη.

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	k_6
	0	8	2	1	0	1	k_7
	z	k_1	$k_2 = 6-(2\cdot 0+2\cdot 0) = 6$	$k_3 = 7-(3\cdot 0+1\cdot 0) = 7$	$k_4 = 0$	$k_5 = 0$	

Παρατηρήστε ότι

$k_4 = k_5 = 0$

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (4)-ΕΙΣΕΡΧΟΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

- **Ορισμός:** Καθορίζουμε ως εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση την μεταβλητή η οποία έχει την μικρότερη τιμή θ.

Συνεπώς θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα για το πώς θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους που αναφέρονται στην παράμετρο θ. Ο υπολογισμός γίνεται με βάση τα στοιχεία της στήλης και της στήλης που θα εισέλθει στην βάση. Πιο συγκεκριμένα είναι ο λόγος τους συνεπώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $k_6 = 12/3 = 4, k_7 = \frac{8}{1} = 8$.

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (5)

Ως οδηγό στοιχείο λοιπόν μπορούσαμε να ορίσουμε αυτό που αντιστοιχεί στο στοιχείο της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή καθώς και η εισερχόμενη μεταβλητή (συνεπώς το 3). Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης την εξερχομένη μεταβλητή με την εισερχόμενη και προκύπτει το Tableau 2.

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_3	0	12	2	3	1	0	4
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	7	0	0	

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (6)

- Για ν γεμίσουμε με στοιχεία το δεύτερο μας Tableau θα πρέπει να υπολογίσουμε ότι ο οδηγός στοιχείο θα πρέπει να ισούται με την μονάδα (διαιρείται με το 1/3).
- Κάνοντας τις κατάλληλες γραμμοπράξεις επιθυμούμε το στοιχείο κάτω από τον οδηγό στοιχείο να γίνει μηδέν. Οπότε πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με (-1) και την προσθέτουμε στην δεύτερη.
- Οπότε στην παρούσα φάση το Tableau 2 μετατρέπεται:

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (7)

Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	k_7
	z	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	

Χρησιμοποιούμε τώρα την ίδια μεθοδολογία και έχουμε

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (8)

- Tableau 2

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	k_6
x_4	0	4	4/3	0	1/3	1	k_7
	z	28	4/3	0	-7/3	0	

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ TABLEAU (9)

Συνεχίζοντας με την ίδια λογική παίρνουμε το τελικό μας tableau 3 ως εξής:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
x_2	7	2	0	1	½	- 1/2	-
x_1	6	3	1	0	-1/4	3/4	-
	z	32	0	0	-2	-1	

Τιμή Α.Σ

Λύση του προβλήματος

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π- ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ

Στην περίπτωση όπου σε ένα Simplex tableau όλοι οι λόγοι θ που υπολογίζουμε για να εκτιμήσουμε το ποια μεταβλητή θα εισέλθει είναι αρνητικοί τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Η τιμή που θα υπολογίσουμε για την αντικειμενική μας συνάρτηση θα τείνει στο άπειρο και το πρόβλημα μας χαρακτηρίζεται ως μη φραγμένο.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π-ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΗ ΦΡΑΓΜΕΝΟ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί το παρακάτω π.γ.π:

$$
\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 - x_3 && (1)\\
s.t \quad & 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 && (2)\\
& -x_1 - 7x_2 + 2x_3 \le 2 && (3)\\
& 7x_1 + x_2 - x_3 \le 10 && (4)\\
& 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \le 6 && (5)\\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

		c_j	-1	**-1**	1	0	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
x_4	0	2,5	3/2	**-3/2**	0	1	1/2	0	0	-
x_3	1	3,75	-0,5	**-7/2**	1	0	1/2	0	0	-7,5
x_6	0		13/2	**-5/2**	0	0	1/2	1	0	
x_7	0		3	**-1**	0	0	1	0	1	
	z	$s_j - c_j$	-0,5	**5/2**	0	0	-1/2	0	0	

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Σε ένα Simplex tableau όταν κάποια (-ες) από την τρέχουσα (-ες) βασική (-ες) λύσεις περιέχουν μεταβλητή με τιμή μηδέν τότε μπορούμε να μιλήσουμε για εκφυλισμένη λύση. Η επίλυση του προβλήματος μπορεί να συνεχιστεί με την αντικατάσταση αυτής με μια αυθαίρετη και πάρα πολύ μικρή ποσότητα ε θετική μέχρι το τελικό Tableau και θέτοντας στην άριστη λύση ε=0.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π- ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Εάν κάποια βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε Z=0 τότε αύξηση της τιμής αυτής δεν αλλάζει την τιμή της αντικειμενικής της συνάρτησης. Υπό την προϋπόθεση μάλιστα ότι η λύση είναι μη εκφυλισμένη η εισαγωγή της μεταβλητής αυτής στην βάση θα μας οδηγήσει σε τιμή αντικειμενικούς συνάρτησης της ίδιας αξίας οπότε το πρόβλημα θα έχει άπειρες λύσεις. Οι άπειρες αυτές λύσεις δύναται να εμφανίζονται με την μορφή ενός γραμμικού συνδυασμού λύσεων.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π-ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ας δούμε την λύση του παρακάτω π.γ.π

			140	100	0	0	0	
Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		80	0	0	1	2	-4	
		90	1	0	0	3/4	-1/2	
		20	0	1	0	-1	1	

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ Π.Γ.Π- ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕ ΜΗ ΕΦΙΚΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

			140	100	0	0	0				
	Βάση x_B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
	0	50 0	0	0.75	1	5	0			0	
	1	50 0	1	0.25	0	-5	0			0	
	M	**10 0**	**0**	**-0.2**	**0**	**0**	**-1**			**1**	

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

- Να λυθούν τα παρακάτω π.γ.π

$$\min_{x_1, x_2, ,, x_3} Z : x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

$$s.t.$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$4x_2 - 3x_3 - 8x_5 \geq -10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\min_{x_1, x_2, ,, x_3} Z : x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t.$$

$$-7x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\max_{x_1, x_2, ,, x_3} Z : -x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-x_1 - 7x_2 + 2x_3 \leq 2$$

$$7x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$