

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Τα προβλήματα τους Ακεραίου γραμμικού Προγραμματισμού (Integer Linear Programming) είναι εκείνα των οποίων μερικές ή και όλες οι μεταβλητές απόφασης που συμμετέχουν λαμβάνουν ακέραιες-διακριτές τιμές (binary-δεν ισχύει η προϋπόθεση της διαιρετότητας). Το μαθηματικό υπόδειγμα δεν έχει αλλαγές σε σχέση με αυτό του π.γ.π. Ωστόσο προστίθενται περιορισμός για τις ακέραιες μεταβλητές. Η διαφοροποίηση του μικτού αφορά την ύπαρξη μερικών από τις μεταβλητές να είναι ακέραιες.

ΜΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ

Τα προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού, ανήκουν γενικά σε 3 κατηγορίες:

- Προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές είναι γενικά ακέραιες, τα οποία και λύνονται ως κλασσικά προβλήματα Γραμμικού Προγραμματισμού.
- Προβλήματα στα οποία οι μεταβλητές δεν έχουν φυσικό νόημα όπως οι κλασσικές γραμμικές μεταβλητές (π.χ. μονάδες παραγωγής, ώρες εργασία κλπ), αλλά λογικό νόημα (ναι ή όχι – που συνήθως συμβολίζονται με τις ακέραιες τιμές 0 ή 1). Τα προβλήματα αυτά ονομάζονται προβλήματα 0/1.
- Μερικά προβλήματα 0/1 περιλαμβάνουν ταυτόχρονα, τόσο κλασσικές μεταβλητές, όσο και μεταβλητές με λογικό νόημα (0 ή 1).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ Ι

Σε περιπτώσεις που οι μεταβλητές απόφασης ενός π.γ.π είναι φραγμένες παίρνουν δηλαδή περιορισμένο αριθμό ακέραιων τιμών οι ιδεώδεις μέθοδοι επίλυσης ακέραιων είναι οι μέθοδοι τύπου διακλάδωσης και οριοθέτησης ή κλάδου και φράγματος (branch and bound methods) οι οποίες στηρίζονται σε μια έμμεση απαρίθμηση των δυνατών ακέραιων λύσεων που επιδέχεται το σύστημα. Φυσικά, υπάρχουν και άλλες μέθοδοι ακέραιου π.γ για παράδειγμα οι δυο μέθοδοι των τεμνόντων επιπέδων (cuttingPlane methods-Gass (1985), Garfinkel and Nemhauser (1972), Minoux (1983), Hallin et Lefevre (1986)).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ II

Έστω το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης.

$$\max z = c'x$$

s.t

$$x \in A = \{ x \in R^m / Ax \leq b, x \geq 0 \text{ ακέραιες} \}$$

Η διαδικασία αναπτύσσεται σε τέσσερα στάδια:

1. Λύνουμε το π.γ.π μέσω της Simplex χωρίς περιορισμούς ακεραιότητας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ II

- 2) Εάν η λύση του π.γ.π ικανοποιεί και τους περιορισμούς ακεραιότητας τότε σταματάμε. Εάν όχι καθορίζουμε μια πρώτη ακέραιη λύση της οποίας και η τιμή της Α.Σ αποτελεί το αρχικό κάτω φράγμα.
- 3) Δημιουργούμε δύο υπό-προβλήματα. θεωρούμε ως βέλτιστη $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ και η τιμή x_i^* της x_i δεν είναι ακέραιη:

$$1. \max z = c'x \text{ s.t. } x \in A \wedge x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$$

$$2. \max z = c'x \text{ s.t. } x \in A \wedge x_i \geq \lceil x_i^* \rceil + 1$$

Ακέραιο μέρος του

x_i^*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ III

- 4) Για κάθε υποσύνολο λύσεων, η τιμή της Α.Σ της βέλτιστης μη ακεραίας λύση αποτελεί το άνω φράγμα. Αντίστοιχα η τιμή της Α.Σ της καλύτερης ακεραίας λύση το κάτω φράγμα. Στην περίπτωση όπου τα άνω φράγματα είναι κατώτερα από το ισχύον Κ.Φ δεν συνεχίζουμε. Στην περίπτωση όπου έχουμε λύση με τιμή Α.Σ ίσης ή μεγαλύτερης του Α.Φ η λύση είναι βέλτιστη. Εάν όχι προχωράμε με το καλύτερο Α.Φ.

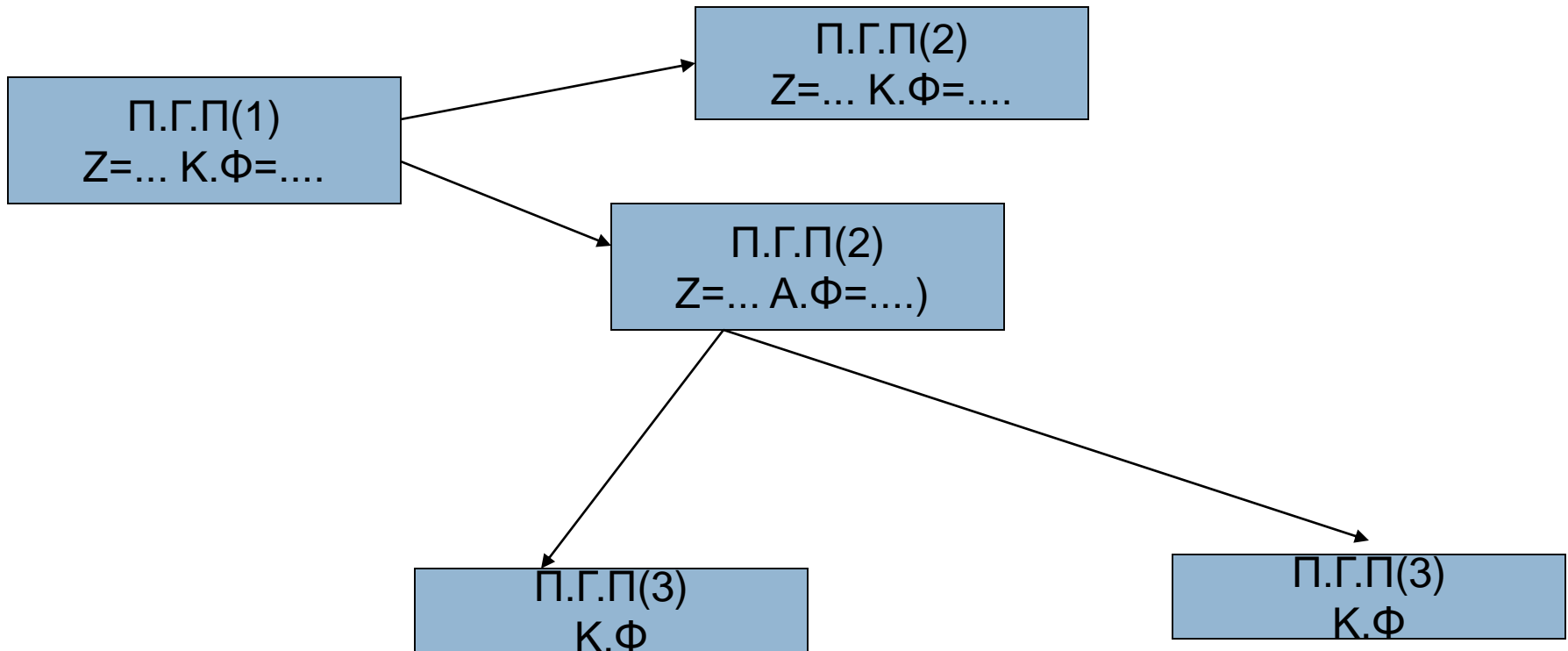
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η επιλογή της αρχικής ακέραιης λύσης στο στάδιο 2 δεν είναι υποχρεωτική, είναι όμως πολύ σημαντική για τη διαδικασία εφαρμογής της μεθόδου, διότι όσο πιο υψηλό είναι το αρχικό κάτω φράγμα τόσο πιο γρήγορα θα συγκλίνει ο αλγόριθμος. Σε μερικές περιπτώσεις μάλιστα, δεν είναι απλή υπόθεση ο καθορισμός μιας καλής αρχικής λύσης.

Η μεθοδολογία του κάτω και άνω φράγματος υλοποιείται από πληθώρα αλγορίθμων οι οποίοι διαφοροποιούνται ως προς τον τρόπο επιλογής του αρχικού κάτω Φράγματος (στάδιο 2) καθώς και την εκάστοτε επιλογή της μεταβλητής στην οποία βασίζεται η διακλάδωση του Σταδίου 3.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Μια διαγραμματική απεικόνιση δίνεται παρακάτω:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\min z = 120000 x_1 + 150000 x_2$$

$$\text{s.t} \quad 40 x_1 + 24 x_2 \leq 355$$

$$x_1 \geq 6$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2, \alpha \text{ κέραιες} \geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

Μια επιχείρηση έχει ένα εργοστάσιο στην Πάτρα που κατασκευάζει χυμούς. Ο γενικός διευθυντής της εταιρείας σκέπτεται να αγοράσει επιπλέον μηχανήματα προκειμένου να αυξήσει την παραγωγική δυναμικότητα της εταιρείας. Έχει την επιλογή αγοράς 1, 2 ή 3 επιπλέον μηχανημάτων. Οι τρεις πιθανές λύσεις, καθώς και το κόστος αγοράς που απαιτείται για κάθε μηχανήμα αλλά και ο αριθμός (σε χιλ.) των τεμαχίων που μπορούν να παραχθούν, φαίνονται στον πίνακα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)-EXCEL SOLVER

Εάν η εταιρεία αποφασίσει να προβεί στην αγορά τριών μηχανημάτων, τότε, εκτός από το σταθερό κόστος των 350000€, η εταιρεία θα πρέπει να πληρώσει επιπλέον 115000€ λόγω επέκτασης του εργοστασίου (δηλαδή το συνολικό σταθερό κόστος για 3 μηχανήματα είναι 465000€). Το μεταβλητό κόστος ανά 1000 τεμάχια είναι 2000€, τα δε έσοδα ανέρχονται στα 3500€ από κάθε πώληση. Να βρεθεί αν συμφέρει την εταιρεία να αγοράσει 1, 2 ή 3 επιπλέον μηχανήματα γνωρίζοντας ότι όποια ποσότητα παράγει, θα μπορεί να τη διαθέσει στην αγορά στη παραπάνω τιμή.

Επιπλέον Μηχανήματα	Κόστος Αγοράς (σε χιλ. €)	Παραγωγική δυναμικότητα (ημερησίως)
1	200	έως 100 μονάδες
2	265	έως 200 μονάδες
3	350	έως 300 μονάδες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ως:

Α.Σ

$$\min z = 1500x_1 + 1500x_2 + 1500x_3 - 2000y_1 - 265000y_2 - 465000y_3$$

$$s.t \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$x_1 \leq 100y_1$$

$$x_2 \leq 200y_2$$

$$x_3 \leq 300y_3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, y_i = 0, 1$$

Επιλογές μηχανών

Παραγωγική
Ικανότητα

Προσοχή: $x_1 - 100y_1 \leq 0$

SOLVER EXCEL (2)

Αρχικά καταγράφουμε το πρόβλημα μας στον solver

The screenshot shows the Microsoft Excel Solver interface. The Solver Parameters dialog box is open, with the following settings:

- Set Objective: $H6$
- To: **Of Max** (checked)
- By Changing Variable Cells: $B4:H4$
- Subject to the Constraints: $B5:H5 \leq B6:H6$
- Make Unconstrained Variables Non-Negative: **Selected**
- Select a Solving Method: **GRG Nonlinear Engine**
- Options: **Make Variable Cells Non-Negative** (checked)
- Help: **Help** (checked)

The spreadsheet data is as follows:

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	X1	X2	X3	Ψ1	Ψ2	Ψ3
ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	0	0	0	0	0	0
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	1500	1500	1500	-200000	-265000	-465000

A callout box points to cell H6 with the text: Α.Σ SUMPRODUCT

SOLVER EXCEL (3)

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the Solver problem setup. The spreadsheet data is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3															
4	ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	X1	X2	X3	Ψ1	Ψ2	Ψ3								
5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	0	0	0	0	0	0								
6	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	1500	1500	1500	-200000	-265000	-465000								
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															

The Solver Parameters dialog box is not visible, but the problem setup is clearly defined in the spreadsheet. The objective function is in cell H6, and the constraints are in cells B4:H4, B5:H5, and B6:H6.

SOLVER EXCEL (4)

The screenshot shows the Microsoft Excel Solver interface. The spreadsheet contains the following data:

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	X1	X2	X3	Ψ1	Ψ2	Ψ3	
ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	0	0	0	0	0	0	
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	1500	1500	1500	-200000	-265000	-465000	0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ							ΤΥΠΟΣ ΔΕΞΙΑ ΣΤΑΘΕΡΑ
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 1	0	0	0	1	1	1	0 1
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 2	1	0	0	-100	0	0	0 0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 3	0	1	0	0	-200	0	0 0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 4	0	0	1	0	0	-300	0 0

Annotations in the image:

- A blue box on the right contains the text: **SUMPRODUCT (B5:G5;B9:G9) e.t.c**. Arrows point from this box to the objective function row (row 6) and the constraint rows (rows 9-12).
- A blue box at the bottom center contains the text: **SUM of the four restrictions**. Arrows point from this box to the right-hand side values of the four constraint rows (rows 9-12).

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (μεταβλητές)

The screenshot displays a Microsoft Excel spreadsheet with the Solver Parameters dialog box open. The spreadsheet contains a linear programming problem with the following data:

ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ	X1	X2	X3	Ψ1	Ψ2	Ψ3	ΤΥΠΟΣ
ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	0	0	0	0	0	0	
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	1500	1500	1500	-200000	-265000	-465000	
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ							
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 1	0	0	0	1	1	1	0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 2	1	0	0	-100	0	0	0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 3	0	1	0	0	-200	0	0
ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 4	0	0	1	0	0	-300	0

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- Set Target Cell: $\$H\6
- Equal To: Max Min Value of: 0
- By Changing Cells: $\$B\$5:\$G\5
- Subject to the Constraints:
 - $\$E\$5:\$G\$5 = \text{binary}$
 - $\$H\$10 \leq \$I\10
 - $\$H\$11 \leq \$I\11
 - $\$H\$12 \leq \$I\12
 - $\$H\$9 = \$I\9

The Solver Parameters dialog box is open, showing the configuration for the Solver. The target cell is set to $\$H\6 , and the goal is to maximize the value. The changing cells are $\$B\$5:\$G\5 . The constraints are listed as follows:

- $\$E\$5:\$G\$5 = \text{binary}$
- $\$H\$10 \leq \$I\10
- $\$H\$11 \leq \$I\11
- $\$H\$12 \leq \$I\12
- $\$H\$9 = \$I\9

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (περιορισμοί)

3ο Μάθημα - Άσκηση 2.xls - Microsoft Excel

Home Insert Page Layout Formulas Data Review View Add-Ins

Clipboard Font Alignment Number Styles Cells Editing

J16

1 Microsoft Excel 12.0 Answer Report
2 Worksheet: [3ο Μάθημα - Άσκηση 2.xls]Sheet1
3 Report Created: 27/11/2011 5:53:38 μμ
4
5
6 Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$H\$6	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	0	35000

11 Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$B\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ X1	0	0
\$C\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ X2	0	200
\$D\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ X3	0	0
\$E\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ1	0	0
\$F\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ2	0	1
\$G\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ3	0	0

21 Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$H\$9	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 1 ΤΥΠΟΣ	1	\$H\$9=\$I\$9	Not Binding	0
\$H\$10	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 2 ΤΥΠΟΣ	0	\$H\$10<=\$I\$10	Binding	0
\$H\$11	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 3 ΤΥΠΟΣ	0	\$H\$11<=\$I\$11	Binding	0
\$H\$12	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ 4 ΤΥΠΟΣ	0	\$H\$12<=\$I\$12	Binding	0
\$E\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ1	0	\$E\$5=binary	Binding	0
\$F\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ2	1	\$F\$5=binary	Binding	0
\$G\$5	ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ Ψ3	0	\$G\$5=binary	Binding	0

Answer Report 1 Sheet1 Sheet2 Sheet3

Ready

3ο Μάθημα - 1ο Εξά... 3ο Μάθημα - Άσκη... 3ο Μάθημα - Αξέρι...

EL 100% 5:53 μμ

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 10^ο απο τους Κολέτσο-Στογιάννη
- Κεφάλαιο 11^ο απο Σίσκο
- Κεφάλαιο 9^ο απο Ταθα