ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2021-2022

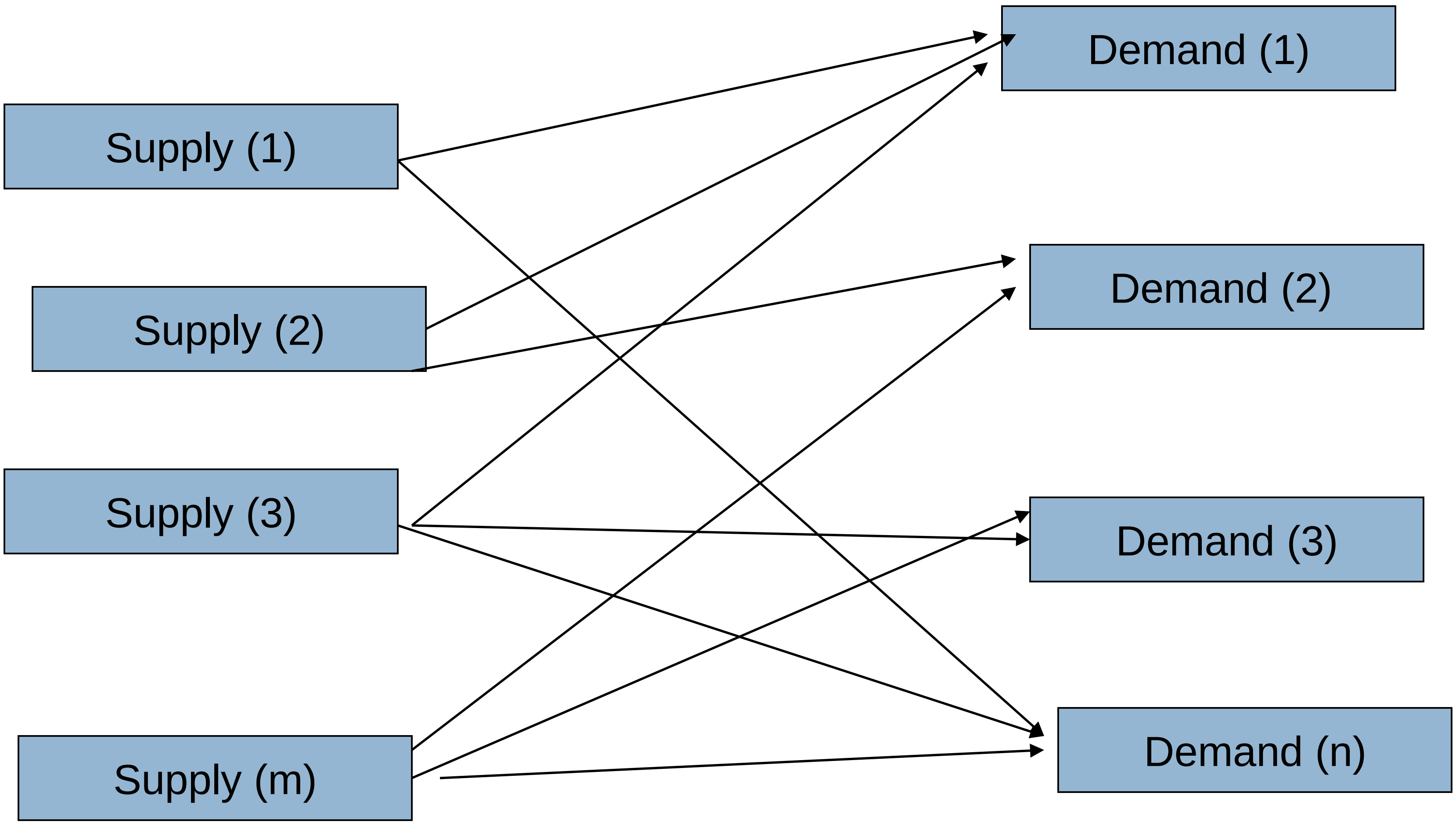
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Το πρόβλημα της μεταφοράς ασχολείται συνήθως με περιπτώσεις αποστολής προϊόντων προερχόμενες από διαφορετικές πηγές σε διάφορους προορισμούς. Σκοπός του προβλήματος είναι ο προσδιορισμός ενός πλάνου μεταφοράς (βέλτιστης) που μειώνει στο ελάχιστο το συνολικό κόστος μεταφοράς αι ικανοποιεί βέβαια τους περιορισμούς ζήτησης και προσφοράς για τον προϊόν.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Μια διαγραμματική απεικόνιση δίνεται παρακάτω:



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Υπάρχουν δηλαδή m πηγές $s_i, i = 1, 2, ..., m$ (προσφερόμενη ποσότητα) και n $d_j, i = 1, 2, ..., n$ προορισμοί που αντιπροσωπεύονται από κόμβους.Το κόστος μεταφοράς από την i-πηγή στον j-προορισμό συμβολίζεται ως c_{ij} ενώ η ποσότητα ως x_{ij}.

Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που προκύπτει κατά την διαδικασία αυτή παριστάνεται παρακάτω ως εξής:

Π.Γ.Π ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

$$\min c = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Α.Σ

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

Περιορισμοί προσφοράς

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Περιορισμοί ζήτησης

$$x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Ο αλγόριθμος λύσης του προβλήματος της μεταφοράς περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Εντοπισμός μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσεως (Μέθοδοι Βορειοδυτικής γωνίας, Ελαχίστου κόστους, Vogel).
2. Μέσω της Simplex αποφασίζουμε ποια είναι η βέλτιστη λύση διαφορετικά συνεχίζουμε με το επόμενο,
3. Με την βοήθεια της συνθήκης εφικτότητας αποφασίζουμε ποια μεταβλητή θα εγκαταλείψει την προσωρινή βασική λύση και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

Μια επιχείρηση προσπαθεί να διαθέσει το προϊόν της σε 12 διαφορετικούς προορισμούς με βάση τρία εργοστάσια παραγωγής (Πάτρας, Βόλου και Θεσσαλονίκης) και 4 κέντρων Διανομής (Αθήνα, Ηράκλειο , Λάρισα και Ιωάννινα).

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

Το πρόβλημα γ.π δίνεται ως εξής:

$$\min c = 5x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 9x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} +$$

$$4x_{23} + 7x_{24} + 5x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34}$$

$$s.t$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 350$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 300$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 450$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 400$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 200$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ALGORITHM)

Ξεκινάμε από το κελί που βρίσκεται πάνω και αριστερά και εκχωρούμε φορτία στις διαδρομές με βάση:

1. Σε κάθε κελί εκχωρούμε την μέγιστη δυνατή ποσότητα ώστε να μηδενιστεί η διαθέσιμη ποσότητα της αντίστοιχης γραμμής ή στήλης.
2. Συνεχίζουμε με το επόμενο κελί της ίδιας γραμμής μέχρι να εξαντληθεί η ποσότητα της γραμμής.
3. Όταν εξαντληθεί η διαθέσιμη ποσότητα μιας γραμμής συνεχίζουμε με το κελί της ιδίας στήλης στην επόμενη γραμμή του πίνακα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5	3	9	350 (350-200)
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200 (200-200)	300	400	200	1100

Η στήλη μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5	5 (150)	3	9	150 (150-150)
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	0	300 (300-150)	400	200	1100

Η γραμμή μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Βόλος	6	3 (150)	4	7	300 (300-150)
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	0	150 (150-150)	400	200	1100

Η στήλη μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Βόλος	6	3 (150)	4 (150)	7	150 (150-150)
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	0	0	400 (400-150)	200	1100

Η γραμμή μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Βόλος	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Θεσ/νίκη	5	4	6 (250)	8	450 (450-250)
Ζήτηση Κέντρων	0	0	250 (250-250)	200	1100

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Βόλος	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Θεσ/νίκη	5	4	6 (250)	8 (200)	200 (200-200)
Ζήτηση Κέντρων	0	0	0	200	1100

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

Ο υπολογισμός του κόστους με βάση την μέθοδο της βορειοδυτικής γωνίας μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Διαδρομή	**Ποσότητα**	**Κόστος Μονάδας**	**Συνολικό Κόστος**
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Λάρισα	150	5	750
Βόλος-Λάρισα	150	3	450
Βόλος-Αθήνα	150	4	600
Θεσ/νίκη-Αθήνα	250	6	1500
Θεσ/νίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
ΣΥΝΟΛΟ			5900

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ALGORITHM

Τα βήματα για την συγκεκριμένη μέθοδο είναι τα εξής:

- Ξεκινάμε από την διαδρομή με τον μικρότερο συντελεστή κόστους και στην διαδρομή αυτή εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο ώστε να εξαντληθεί η ποσότητα της πηγής προέλευσης ή να ικανοποιηθεί η ζήτηση.
- Διαγράφουμε την πηγή προέλευσης ή τον προορισμό (ανάλογα).
- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα έως ότου εξαντληθούν οι ποσότητες από τις πηγές προέλευσης και η ζήτηση των περιορισμών.

.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	350 (350-350)
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400 (400-350)	200	1100

Η γραμμή μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3	9	0
Βόλος	6	3 (300)	4	7	300 (300-300)
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300 (300-300)	50	200	1100

Η γραμμή μηδενίζεται

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	0
Βόλος	6	3 (300)	4	7	0
Θεσ/νίκη	5 (200)	4	6 (50)	8 (200)	450 (450-450)
Ζήτηση Κέντρων	200 (200-200)	0	50 (50-50)	200(200-200)	1100

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ (ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Ο υπολογισμός του κόστους με βάση την μέθοδο ελαχίστου κόστους μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Διαδρομή	**Ποσότητα**	**Κόστος Μονάδας**	**Συνολικό Κόστος**
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος-Λάρισα	300	3	900
Θεσ/νίκη-Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσ/νίκη-Αθήνα	50	6	300
Θεσ/νίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
ΣΥΝΟΛΟ			4850

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL

Η συγκεκριμένη μέθοδος αν και πιο πολύπλοκη παρέχει κατά κανόνα καλύτερες λύσεις. Λαμβάνει υπόψη το κόστος των διαδρομών αλλά όχι το απόλυτο κόστος κάθε διαδρομής ενώ περιλαμβάνει για κάθε πηγή και κάθε προορισμό την αύξηση κόστους που θα προέκυπτε εάν αντί της οικονομικής επιλογής επιλέγαμε την δεύτερη πιο οικονομική.

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM

1. Για κάθε πηγή προέλευσης όπως και για κάθε προορισμό υπολογίζουμε έναν δείκτη ποινής (η διαφορά μεταξύ του μικρότερου και του αμέσως μικρότερου κόστους των διαδρομών κάθε γραμμής και στήλης. Το μέγιστο δυνατό φορτίο εκχωρείται στην διαδρομή Πάτρα-Αθήνα (μεγαλύτερη ποινή αλλά επιλέγουμε την διαδρομή με το μικρότερο κόστος)

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM ΒΗΜΑ 1

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων	ΠΟΙΝΕΣ
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	350 (350-350	5-3=2
Βόλος	6	3	4	7	300	4-3=1
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4=1
Ζήτηση	200	300	400 (400-350)	200	1100	
ΠΟΙΝΕΣ	5-5=0	4-3=1	4-3=1	8-7=1		

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM

2. Επαναϋπολογίζουμε τον δείκτη ποινής για κάθε πηγή προέλευσης και προορισμό (όχι για την περίπτωση της Πάτρας) . Η μεγαλύτερη ποινή ανήκει στη Αθήνα και το μέγιστο δυνατό φορτίο εκχωρείται στην διαδρομή Βόλος-Αθήνα (μεγαλύτερη ποινή αλλά επιλέγουμε την διαδρομή με το μικρότερο κόστος). Εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο 50 μονάδων.

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM ΒΗΜΑ 2

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων	ΠΟΙΝΕΣ
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	0	
Βόλος	6	3	4 (50)	7	300 (300-50)	4-3=1
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4=1
Ζήτηση	200	300	400 (400-350)	200	1100	
ΠΟΙΝΕΣ	6-5=1	4-3=1	6-4=2	8-7=1		

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM

3. Επαναϋπολογίζουμε τον δείκτη ποινής για κάθε πηγή προέλευσης και προορισμό (όχι για την περίπτωση της Πάτρας και την στήλη της Αθήνας) . Το μέγιστο δυνατό φορτίο εκχωρείται στην διαδρομή Βόλος-Λάρισα. Εκεί εκχωρούμε το μέγιστο δυνατό φορτίο (250 μονάδες)

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM ΒΗΜΑ 3

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων	ΠΟΙΝΕΣ
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	0	
Βόλος	6	3 (250)	4 (50)	7	0	6-3=3
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	5-4=1
Ζήτηση	200	50	0	200	1100	
ΠΟΙΝΕΣ	6-5=1	4-3=1		8-7=1		

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM

4. Η θεσαλονίκη ως το μόνο εργοστάσιο που διαθέτει η επιχείρηση θα μας δώσει τον τελιό πίνακα Vogel.

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL ALGORITM ΒΗΜΑ 4

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3 (350)	9	0
Βόλος	6	3 (250)	4 (50)	7	0
Θεσ/νίκη	5 (200)	4 (50)	6	8 (200)	450
Ζήτηση	0	0	0	0	1100

ΜΕΘΟΔΟΣ VOGEL (ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Ο υπολογισμός του κόστους με βάση την μέθοδο Vogel μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Διαδρομή	**Ποσότητα**	**Κόστος Μονάδας**	**Συνολικό Κόστος**
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος-Λάρισα	250	3	750
Βόλος-Αθήνα	50	4	200
Θεσ/νίκη-Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσ/νίκη-Λάρισα	50	4	200
Θεσ/νίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
ΣΥΝΟΛΟ			4800

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΧΩΡΗΣΗΣ (MODIFIED DISTRIBUTION MODI)

Η μεθοδολογία της MODI δίνεται παρακάτω σε βήματα:

1. Ορίζουμε τις μεταβλητές:

R_i : μεταβλητή για την i σειρά (προέλευση)

K_j : μεταβλητή για την j σειρά (προορισμού)

C_{ij} : κόστος αντίστοιχης διαδρομής

2. Έχουμε ένα σύστημα m+n-1 εξισώσεων με m+n αγνώστων καθώς $R_i + K_j = C_{ij}$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗΣ ΕΚΧΩΡΗΣΗΣ (MODIFIED DISTRIBUTION MODI)

3. Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών της πηγής προέλευσης και του προορισμού θέτοντας $R_1 = 0$ και λύνοντας ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές.
4. Υπολογίζουμε το δείκτη βελτίωσης ως

$$\Delta B = C_{ij} - (R_i + K_j)$$

για κάθε μη χρησιμοποιηθέντα διαδρομή.

5. Επιλέγουμε την διαδρομή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΟΡΕΙΟΔΥΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

ΠΡΟΣ/ΑΠΟ	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή εργοστασίων
Πάτρα	5 (200)	5 (150)	3	9	0
Βόλος	6	3 (150)	4 (150)	7	0
Θεσ/νίκη	5	4	6 (250)	8 (200)	200 (200-200)
Ζήτηση Κέντρων	0	0	0	200	1100

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΒΔ ΓΩΝΙΑ

Διαδρομή	**Εξίσωση**
Πάτρα-Ιωάννινα	R1+K1=5
Πάτρα-Λάρισα	R1+K2=5
Βόλος-Λάρισα	R2+K2=3
Βόλος-Αθήνα	R2+K3=4
Θεσ/νίκη-Αθήνα	R3+K3=6
Θεσ/νίκη-Ηράκλειο	R3+K4=8

Θέτοντας R1=0 έχουμε

K1=5

K2=5

R2=-2

K3=6

P3=0

K4=8

Μετα υπολογίζουμε τον

δείκτη βελτίωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΒΔ ΓΩΝΙΑ

Διαδρομή	$\Delta B = C_{ij} - (R_i + K_j)$
Πάτρα-Ιωάννινα	5-0-5=0
Πάτρα-Λάρισα	5-0-5=0
Βόλος-Λάρισα	3-(-2)-5=3
Βόλος-Αθήνα	7-(-2)-8=1
Θεσ/νίκη-Αθήνα	5-0-5=0
Θεσ/νίκη-Ηράκλειο	4-0-5=-1

ΠΑΤΡΑ-ΑΘΗΝΑ (ΓΙΑΤΙ;)

(ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΟΣΤΟΥΣ)

Δεδομένα Προβλήματος

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**

Βασική εφικτή λύση από την εφαρμογή της μεθόδου Vogel

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400
	Λουτράκι	180	80	240	300	850
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**

Η μέθοδος ανακατανομής των εκχωρήσεων (Modified Distribution Method – MODI)- Εισερχόμενη

- Υπολογίζουμε για κάθε μη κενό κελί (κατειλημμένο) βοηθητικές τιμές των u_i, $i=1,2,\dots,m$ για κάθε γραμμή και βοηθητικές τιμές v_j $j=1,2,\dots,n$ για κάθε στήλη. Ο υπολογισμός παρέχεται μέσω της $u_i+v_j=c_{ij}$.
- Για κάθε κελί (μη βασική μεταβλητή) υπολογίζουμε το αντίστοιχο κόστος ευκαιρίας μέσω της σχέσης: $e_{ij}=C_{ij}-u_i-v_j$. Εάν όλα τα e_{ij} είναι μη αρνητικά τότε έχουμε την βέλτιστη λύση. Διαφορετικά προχωρούμε στο επόμενο βήμα.
- Επιλέγουμε το μικρότερο αρνητικό κελί. Σε περίπτωση ισοδύναμων επιλογών η επιλογή είναι αυθαίρετη.

Για να βρούμε την εξερχόμενη μεταβλητή:

- Ξεκινάμε από το κελί που έχει επιλεγεί να εισέλθει στη λύση. Κατασκευάζουμε ένα κλειστό μονοπάτι που ξεκινά από το εισερχόμενο και καταλήγει πίσω σ’ αυτό πραγματοποιώντας άλματα μόνο πάνω σε κατειλημμένα κελιά, κάνοντας μία μόνο στάση σε κάθε γραμμή ή στήλη που επιλέγουμε.
- Δίνουμε διαδοχικά θετικά και αρνητικά πρόσημα στα διάφορα κελιά του μονοπατιού ξεκινώντας με “+” για το εισερχόμενο.

Για να βρούμε την εξερχόμενη μεταβλητή:

- Επιλέγουμε ως εξερχόμενο το κελί με τη μικρότερη τρέχουσα εκχώρηση μεταξύ αυτών που έχουν “-”. Το κελί αυτό θα δώσει όλη την ποσότητά του στο εισερχόμενο. Σε ισοδύναμες επιλογές, η επιλογή είναι αυθαίρετη.
- Στα κελιά του μονοπατιού με θετικό πρόσημο προσθέτουμε την ποσότητα του εξερχόμενου κελιού και αντίστοιχα την αφαιρούμε από τα κελιά με αρνητικό πρόσημο. Η λύση που προκύπτει είναι η νέα τρέχουσα.

Υπολογισμός των ποσοτήτων u_i και v_j

$$u_1 + v_4 = 160$$
$$u_2 + v_2 = 80$$
$$u_2 + v_3 = 240$$
$$u_3 + v_1 = 120$$
$$u_3 + v_3 = 500$$
$$u_3 + v_4 = 440$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow$$

$$u_2 = 20$$
$$u_3 = 280$$
$$v_1 = -160$$
$$v_2 = 60$$
$$v_3 = 220$$
$$v_4 = 160$$

Υπολογισμός των ποσοτήτων u_i και v_j

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	850	20
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350	280
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**	
v_j		-160	60	220	160		

Υπολογισμός των ποσοτήτων e_{ij} (κόστη ευκαιρίας)

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700 540	360 420	120 340	160	400	0
	Λουτράκι	320 180	80	240	120 300	850	20
	Λ. Όρη	120	-40 300	500	440	350	280
Ζήτηση		150	700	250	500	1600	
v_j		-160	60	220	160		

$$e_{11} = c_{ij} - u_i - v_j = 540 - 0 - (-160) = 700$$

Ανακατανομή των εκχωρήσεων – δημιουργία κλειστού μονοπατιού

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ								Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο		Κερ/νι		Βόλος		Θεσ/νίκη			
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700	540	360	420	120	340		160	400	0
	Λουτράκι	320	180	(-)	80	(+)	240	120	300	850	20
	Λ. Όρη		120	-40 (+)	300	(-)	500		440	350	280
Ζήτηση		150		700		250		500		**1600**	
v_j		-160		60		220		160			

Μετατοπίσεις που έγιναν στο μονοπάτι που δημιουργήθηκε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ανακατανομής των εκχωρήσεων

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				
		Ηράκλειο	**Κερ/νι**	**Βόλος**	**Θεσ/νίκη**	**Προσφορά**
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	**Έδεσσα**	540	420	340	160 **400**	400
	Λουτράκι	180	80 **~~700~~** **600**	240 **~~150~~** **250**	300	850
	Λ. Όρη	120 **150**	300	500 **~~100~~ 0**	440 **100**	350
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**

Βασική εφικτή λύση

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				**Προσφορά**
		Ηράκλειο	**Κερ/νι**	**Βόλος**	**Θεσ/νίκη**	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	**Έδεσσα**	540	420	340	160 **400**	400
	Λουτράκι	180	80 **600**	240 **250**	300	850
	Λ. Όρη	120 **150**	300 **100**	500	440 **100**	350
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**

Υπολογισμός των ποσοτήτων u_i και v_j εκ νέου

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά	u_i
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη		
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160	400	0
	Λουτράκι	180	80	240	300	850	60
	Λ. Όρη	120	300	500	440	350	280
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**	
v_j		-160	20	180	160		

Υπολογισμος των ποσοτητων e_{ij} (κοστη ευκαιριας) εκ νεου – Βέλτιστη λύση, αφού δεν περιέχει αρνητικά κόστη ευκαιρίας

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ					
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	Προσφορά	u_i
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	700 540	400 420	160 340	160	400	0
	Λουτράκι	280 180	80	240	80 300	850	60
	Λ. Όρη	120	300	40 500	440	350	280
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**	
v_j		-160	20	180	160		

Βέλτιστη εφικτή λύση από την εφαρμογή της μεθόδου της Μεταφοράς

		ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΣ				Προσφορά
		Ηράκλειο	Κερ/νι	Βόλος	Θεσ/νίκη	
ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ	Έδεσσα	540	420	340	160 **400**	400
	Λουτράκι	180	80 **600**	240 **250**	300	850
	Λ. Όρη	120 **150**	300 **100**	500	440 **100**	350
Ζήτηση		150	700	250	500	**1600**

Βέλτιστη εφικτή λύση από την εφαρμογή της μεθόδου της Μεταφοράς:

- Η Έδεσσα παράγει **400** χιλιο-κιβώτια και τα αποστέλλει όλα στη Θεσσαλονίκη,
- Το Λουτράκι παράγει **850** χιλιο-κιβώτια και αποστέλλει **600** στο Κερατσίνι και τα υπόλοιπα **250** στο Βόλο,
- Το εργοστάσιο στα Λευκά Όρη παράγει **350** χιλιο-κιβώτια και αποστέλλει **150** στο Ηράκλειο Κρήτης, **100** στο Κερατσίνι και **100** στη Θεσσαλονίκη.
- Η λύση αυτή δίνει ελάχιστο κόστος **264,000 €**.

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 7ο απο τους Χατζησταμούλου-Κουνετά
- Κεφάλαιο 9ο απο τους Κολέτσο-Στογιάννη
- Κεφάλαιο 4ο απο Τσάντα-Βασιλείου
- Κεφάλαιο 12ο απο Σίσκο
- Κεφάλαιο 5ο απο Taha