



ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ-
2024-2025**

ΘΕΜΑ 1 (ΜΟΝΑΔΕΣ 2.5)

Μία επιχείρηση παραγωγής ενέργειας χρησιμοποιεί δύο μονάδες παραγωγής, τη Μονάδα Α και τη Μονάδα Β, για να καλύψει τη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας σε μια περιοχή. Η Μονάδα Α μπορεί να παράγει έως και 100 MWh ηλεκτρικής ενέργειας την ημέρα, με κόστος 50 χρηματικές μονάδες ανά MWh, ενώ η Μονάδα Β μπορεί να παράγει έως και 150 MWh ηλεκτρικής ενέργειας την ημέρα, με κόστος 70 χρηματικές μονάδες ανά MWh. Σύμφωνα με τους περιβαλλοντικούς περιορισμούς που τίθενται από τη νομοθεσία, η Μονάδα Β δεν μπορεί να παράγει περισσότερες από 50 MWh σε σχέση με την Μονάδα Α. Η συνολική ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας στην περιοχή/περιφέρεια είναι τουλάχιστον 200 MWh την ημέρα. Η επιχείρηση επιθυμεί να προσδιορίσει την ηλεκτρική ενέργεια (σε MWh) που θα παράγουν οι Μονάδες Α και Β, ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής, ενώ ταυτόχρονα να καλύψει τη ζήτηση. Διατυπώστε ένα μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για την επίλυση του προβλήματος. Εξηγήστε με σαφήνεια τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και το φυσικό νόημα των περιορισμών του μοντέλου σας. Πόσες MWh ενέργειας την ημέρα θα παράγουν οι Μονάδες Α και Β ώστε η επιχείρηση να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος παραγωγής ενέργειας καλύπτοντας ταυτόχρονα τη ζήτηση ενέργειας;

ΘΕΜΑ 2 (ΜΟΝΑΔΕΣ 3)

Το νοσοκομείο μιας πόλης προχώρησε στην αναβάθμιση των υπηρεσιών του παρέχοντας επίσης την διενέργεια εγχειρήσεων αλλά και συνυπολογίζοντας τις ημέρες νοσηλείας των ασθενών με βάση τον παρακάτω πίνακα.

	Επισκέψεις	Εξετάσεις	Αριθμός χειρουργικών Επεμβάσεων	Ημέρες Νοσηλείας	Διαθέσιμες Ποσότητες
Κεφάλαιο	2	3	4	7	4600
Εργασία	3	4	5	6	5000
Τιμή Πώλησης	4	6	7	8	

Ωστόσο για να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις των ασθενών του το νοσοκομείο θα πρέπει να παράγει την ίδια χρονική περίοδο 950 μονάδες συνολικά υπηρεσιών από τις επισκέψεις, εξετάσεις χειρουργικές επεμβάσεις και ημέρες νοσηλείας ενώ οι 400 μονάδες υπηρεσιών θα πρέπει να είναι ημέρες μόνο νοσηλείας. Να δώσετε την άριστη λύση του προβλήματος προσδιορίζοντας τις ποσότητες από κάθε προϊόν.



ΘΕΜΑ 3 (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

Δίνεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Για αυτό το πρόβλημα και το δυικό του οι εφικτές λύσεις είναι $x = (5, 5, 0, 0)'$ και $w = (1/2, 0)'$. Διατυπώστε το δυικό πρόβλημα. Είναι οι λύσεις αυτές άριστες και γιατί;

$$\begin{aligned} \max & X_1 + X_2 - 3X_3 - 2X_4 \\ \text{s. t. } & 2X_1 + 2X_2 - 5X_3 + 5X_4 \leq 20 \\ & -X_1 + X_2 + 4X_3 - 2X_4 \leq 12 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4 (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

Μια εταιρεία διαθέτει τρία εργοστάσια (Α, Β, Γ) και τέσσερα καταστήματα (1, 2, 3, 4). Η παραγωγή των εργοστασίων και η ζήτηση των καταστημάτων φαίνονται παρακάτω:

Πίνακας Κόστους, Προσφοράς & Ζήτησης

	Κατάστημα 1	Κατάστημα 2	Κατάστημα 3	Κατάστημα 4	Προσφορά
Εργοστάσιο Α	6€	8€	11€	13€	30
Εργοστάσιο Β	7€	9€	12€	7€	40
Εργοστάσιο Γ	4€	8€	8€	5€	20
Ζήτηση	20	30	30	10	

Να υπολογίσετε το πλάνο μεταφοράς που ικανοποιεί πλήρως τις ανάγκες των καταστημάτων με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

ΘΕΜΑ 5 (ΜΟΝΑΔΕΣ 2)

- Ο αριθμός των..... ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, που ικανοποιεί τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις, είναι πεπερασμένος
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων ενός προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι..... σύνολο.
- Το σύνολο των εφικτών λύσεων καλείται
- Δυνατή (ή εφικτή) λύση του προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού είναι κάθε λύση του συστήματος.....
- Ποια είναι η έννοια της σκιάδους τιμής (shadow price);

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα



Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές που παριστάνουν την ηλεκτρική ενέργεια (σε MWh) που παράγουν οι Μονάδες A και B:

x_1 : ηλεκτρική ενέργεια σε MWh που παράγει η Μονάδα A ανά ημέρα

x_2 : ηλεκτρική ενέργεια σε MWh που παράγει η Μονάδα B ανά ημέρα

Με βάση τα στοιχεία του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση Z που εκφράζει το συνολικό κόστος ενέργειας το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε εκφράζεται ως εξής:

$$Z = 50x_1 + 70x_2$$

Για τους περιορισμούς έχουμε:

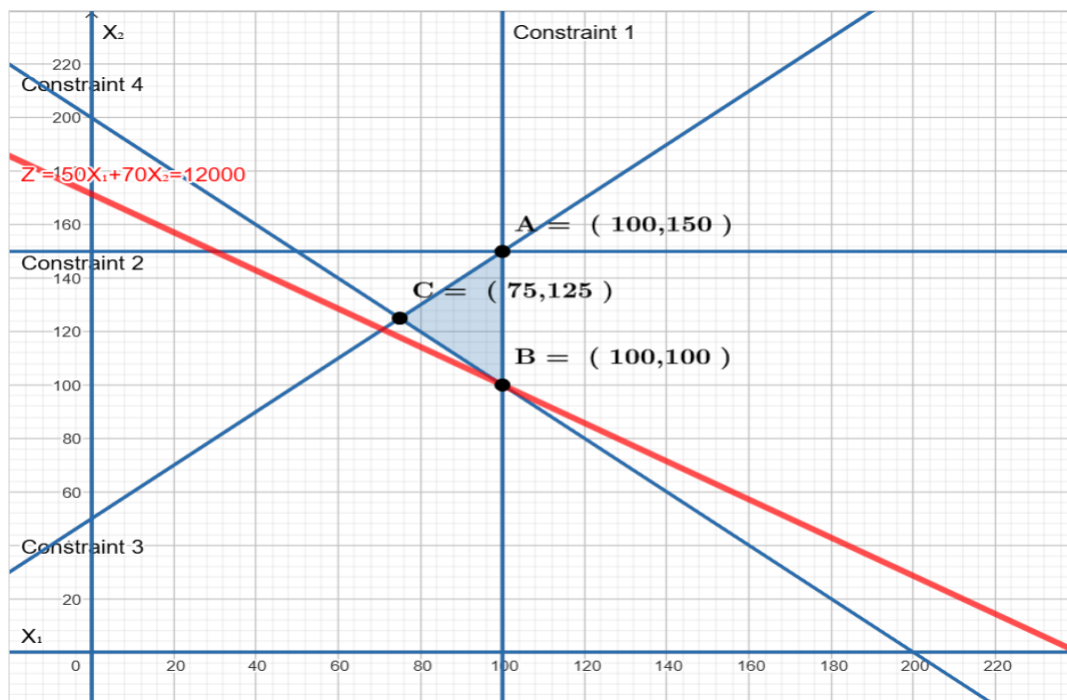
1^{ος} περιορισμός: Το όριο παραγωγής της Μονάδας A είναι 100 MWh: $x_1 \leq 100$

2^{ος} περιορισμός: Το όριο παραγωγής της Μονάδας B είναι 150 MWh: $x_2 \leq 150$

3^{ος} περιορισμός: Ο περιβαλλοντικός περιορισμός που θέτει ότι η Μονάδα B δεν μπορεί να παράγει περισσότερο από 50 MWh ηλεκτρικής ενέργειας από τη Μονάδα A: $x_2 - x_1 \leq 50$

4^{ος} περιορισμός: Κάλυψη της ζήτησης με τουλάχιστον 200 MWh: $x_1 + x_2 \geq 200$

Περιορισμοί μη αρνητικότητας: $x_1, x_2 \geq 0$



Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε μία τουλάχιστον εκ των κορυφών της εφικτής περιοχής. Έτσι, θα πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών A, B και C της εφικτής περιοχής.

- Η κορυφή A αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $x_1 = 100$ και $x_2 = 150$. Άρα, το σημείο A είναι το (100, 150).
- Η κορυφή B αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $x_1 = 100$ και $x_1 + x_2 = 200$. Άρα, το σημείο B είναι το (100, 100).
- Η κορυφή C αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $x_2 - x_1 = 50$ και $x_1 + x_2 = 200$. Άρα, το σημείο C είναι το (75, 125).

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = 50x_1 + 70x_2$ σε κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.1.

**Πίνακας 1.1:** Τιμές αντικειμενικής συνάρτησης στις κορυφές της εφικτής περιοχής

Κορυφή	Συντεταγμένες	Κόστος $Z = 50x_1 + 70x_2$
A	(100, 150)	$50 \cdot 100 + 70 \cdot 150 = 15.500$
B	(100, 100)	$50 \cdot 100 + 70 \cdot 100 = 12.000$ (ελάχιστο)
C	(75, 125)	$50 \cdot 75 + 70 \cdot 125 = 12.500$

Από τις τιμές αυτές προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος βρίσκεται στην κορυφή Β, με συντεταγμένες (100, 100) και τιμή 12.000. Άρα, η επιχείρηση παραγωγής ενέργειας πρέπει να παράγει ανά ημέρα 100 MWh από τη Μονάδα Α και 100 MWh από τη Μονάδα Β.

ΘΕΜΑ 2

Η άριστη λύση για το πρόβλημα είναι $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 400, 150, 400)$ ενώ η τιμή της αντικειμενικής

συνάρτησης είναι $z = 6650$ ευρώ. Το πρόβλημα γράφεται ως εξής:

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950$$

$$x_4 \geq 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 4600$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

το οποίο με τις προσθήκες τεχνητών και περιθωρίων μεταβλητών

$$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + Mx_5 + Mx_7$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950$$

$$x_4 - x_6 + x_7 = 400$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_8 = 4600$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_9 = 5000$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_9 \geq 0$$

Το τελευταίο tableau είναι το παρακάτω.

			4	6	7	8	-M	0	-M	0	0	
	C_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_2	6	400	2	1	0	0	4	-3	3	-1	0	
x_4	8	400	0	0	0	1	0	-1	1	0	0	
x_3	7	150	-1	0	1	0	-3	4	-4	1	0	
x_9	0	250	0	0	0	0	-1	-2	2	-1	1	



		Z=6650	1	0	0	0	3	2	-2	1	0	
--	--	--------	---	---	---	---	---	---	----	---	---	--

ΘΕΜΑ 3

Το δυικό π.γ.π

$$\begin{aligned} \min & 20w_1 + 12w_2 \\ \text{s. t. } & 2w_1 - 3w_2 \geq 1 \\ & 2w_1 + w_2 \geq 1 \\ & -5w_1 + 4w_2 \geq -3 \\ & 5w_1 - 2w_2 \geq -2 \\ & w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Οι λύσεις είναι 'άριστες καθώς οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων ισούνται με δέκα (10).

ΘΕΜΑ 4

Η μέθοδος βορειοδυτικής γωνίας δίνει τιμή 750.

Από → Προς Ποσότητα Κόστος/μον. Συνολικό Κόστος

Συνολικό κόστος (επιβεβαίωση):

- A→1: $20 \times 6 = 120$
- A→2: $10 \times 8 = 80$
- B→2: $20 \times 9 = 180$
- B→3: $30 \times 12 = 360$
- B→4: $10 \times 7 = 70$

Σύνολο: $120 + 80 + 180 + 360 + 70 = 730 \text{ €}$.

ΘΕΜΑ 5

A. βασικών εφικτών λύσεων

B. κυρτό κλειστό

Γ. Εφικτή περιοχή

Δ. δηλαδή κάθε διάνυσμα x^* που ικανοποιεί τους περιορισμούς $x \geq 0$

Ε. Αν λυθεί ένα πρόβλημα με περιορισμούς (constraints), η σκιώδης τιμή ενός περιορισμού δείχνει πόσο θα βελτιωνόταν η λύση αν αυξανόταν η διαθεσιμότητα του συγκεκριμένου πόρου κατά μία μονάδα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ -
ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF
ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500
PATRAS, GR