ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

2009-2010

Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ

Μάθημα 4ο

Γραμμικά Συστήματα

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Ι

Ένα σύνολο m εξισώσεων n αγνώστων που έχει την ακόλουθη μορφή θα καλείται γραμμικό σύστημα:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΙΙ

Μια n-άδα αριθμών $x_1, x_2, \ldots x_n$ που επαληθεύει τις εξισώσεις του παραπάνω γραμμικού συστήματος θα καλείται λύση αυτού και το σύνολο όλων των λύσεων θα καλείται γενική λύση του συστήματος.

Όταν ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστο μία λύση θα καλείται *συμβιβαστό* διαφορετικά *αδύνατο ή μη συμβιβαστό.*

Η χρησιμοποίηση μη γραμμικών εξισώσεων στην εφαρμοσμένη οικονομετρία δεν είναι σύνηθης παρότι στην Οικονομική Θεωρία όλες οι συναρτησιακές σχέσεις δεν είναι γραμμικές (Cobb-Douglas)

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ III

Στην περίπτωση όπου οι συντελεστές των σταθερών όρων είναι όλοι ίσοι με μηδέν το σύστημα θα καλείται ομογενές διαφορετικά μη ομογενές. Μια απεικόνιση ενός γραμμικού συστήματος με βάση πίνακες είναι η ακόλουθη:

Πίνακας Συντελεστών

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots. & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Πίνακας Σταθερών όρων

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Πίνακας Αγνώστων

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ IV

Ο mx(n+1) πίνακας καλείται επαυξημένος και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(A/b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{22} & b_2 \\ \dots & \dots. & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ IV

● ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Καθεμία από τις παρακάτω διαδικασίες θεωρείται ως στοιχειώδης μετασχηματισμός:

1. Πολλ/μος μιας εξίσωσης του συστήματος με μη μηδενικό αριθμό $(symbol : r_i \leftrightarrow r_j)$
2. Εναλλαγή στην θέση 2 εξισώσεων. $(symbol : r_i \leftrightarrow ar_j)$
3. Πρόσθεση σε μια εξίσωση πολλαπλάσιο άλλης

$(symbol : r_i \leftrightarrow ar_j + r_j)$

ΓΡΑΜΜΟΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ

Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n$. Θα λέμε ότι ο πίνακας Α είναι γραμμοισοδύναμος με τον Β εάν ο Β προκύπτει από τον Α μέσα από μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (ή στηλών).

ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Ένα γραμμικό σύστημα θα καλείται ομογενές εάν έχει την ακόλουθη μορφή:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \ \ldots.. \ + \ a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 \ + \ \ldots.. + \ a_{2n}x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 \ + \ \ldots.. \ + \ a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Κάθε γραμμικό σύστημα δύναται να έχει:

1. Μια μοναδική Λύση,
2. Άπειρες Λύσεις,
3. Να μην έχει Λύση

ΟΡΙΣΜΟΣ Ι

Κλιμακωτός Πίνακας: Ένας πίνακας θα καλείται κλιμακωτός εάν,

- το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται σε θέση δεξιότερα από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενη γραμμής και
- οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΙΙ

Ανηγμένος Κλιμακωτός Πίνακας εάν είναι

κλιμακωτός και επιπλέον ισχύουν:

- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1,
- Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο 1 είναι το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο της στήλης που το περιέχει.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Κάθε mxn πίνακας είναι γραμμοισοδύναμος με ένα mxn πίνακα.
2. Κάθε γραμμικό σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα γραμμικό σύστημα του οποίου ο επαυξημένος πίνακας είναι κλιμακωτός ή μπορεί να είναι ανηγμένος κλιμακωτός.

Μέθοδος Αντίστροφου Πίνακα

- Προφανώς επίλυση ενός γραμμικού συστήματος επιτυγχάνεται και με την χρήση του αντίστροφου ενός πίνακα A. Εάν θυμίσουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα δίνεται ως:

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

- Το παραπάνω στηρίζεται στην μέθοδο αντιστροφής πίνακα οπότε μπορούμε να αναφερθούμε και στο ανάλογο θεώρημα: Εστω το γραμμικό σύστημα xA=B. Με δεδομένο ότι ο πίνακας A είναι τετραγωνικός και ισχύει ότι η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδέν τότε το σύστημα έχει μονο μια λύση την $x = A^{-1}b$
- Μπορείτε να κατανοήσετε τα πλεονεκτήματα καθώς και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου;

Μέθοδος Cramer-Rao I

- Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

- δηλαδή της μορφής $A\,x = b$

Μέθοδος Cramer-Rao II

1. Εάν η ορίζουσα του πίνακα detA ($|D|$) είναι διαφορετική του μηδενός τότε το σύστημα μας έχει μοναδική λύση.

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right) = \left(\frac{\det A_{x_1}}{\det A}, \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_{x_n}}{\det A} \right)$$

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_{2=} \frac{D_{x_2}}{D}, x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

2.α) Εάν η ορίζουσα $|D| = 0$ και κάποια από τις ορίζουσες $Dx_1, Dx_2, Dx_3, \ldots, D_{x_n}$ είναι μη μηδενική τότε το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο).

β) Εάν η ορίζουσα $|D| = 0$ και ισχύει ότι οι ορίζουσες $Dx_1 = Dx_2 = Dx_3 = \cdots = D_{x_n} = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΛΥΣΕ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Για ένα ομογενές σύστημα AX=0
1) Εάν $|D| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση
2) Εάν $|D| = 0$ τότε έχει άπειρες λύσεις.

Εάν A ο πίνακας ενός γραμμικού συστήματος nxm και $(A|B)$ο επαυξημένος του τότε:

1) Εάν $rank(A) = rank(A|B) = k < m$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις στις οποίες υπολογίζουμε τους k αγνώστους συναρτήσει των άλλων m-k αγνώστων.
2) 2) Εάν $rank(A) = rank(A|B) = m$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση για ένα υποσύστημα mxm που αντισοιχεί σε μη μηδενική ορίζουσα.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS I

- Έστω το παρακάτω σύστημα

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS II

- Χρησιμοποιώ τον επαυξημένο του πίνακα

$$
(A/b) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{22} & b_2 \\ \dots & \dots. & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

Πρόταση Το γραμμικό σύστημα **AX=B** έχει λύσεις εάν και μόνο εάν $rank(A) = rank(A|B)$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS III

- Έστω ότι $α_{11}$ στοιχείο διαφορετικό του μηδέν. Χρησιμοποιώντας την πρώτη γραμμή και κάνοντας γραμμοπράξεις μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία των επόμενων γραμμών που βρίσκονται στην ίδια στήλη με το $α_{11}$.
- Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS IV

Προσπαθούμε να «φτάσουμε» σε έναν πίνακα της μορφής:

$$\left(A/b\right)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_r & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & .. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα με την μέθοδο Gauss: $\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ 6x + 5y - 3z = 6 \\ 4x - y + 3z = 5 \end{cases}$

Λύση

Γράφουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 12 \\ 6 & 5 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 6 & 5 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to -6r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to -4r_1 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 2 & -6 & -30 \\ 0 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & -3 & 1 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to 3r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -64 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & -8 & -64 \end{array}\right]$$

Ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$-8z = -64$$
$$\Leftrightarrow z = 8$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι:

$$y - 3z = -15$$
$$\Leftrightarrow y - 24 = -15$$
$$\Leftrightarrow y = 9$$

Τέλος η πρώτη γίνεται

$$\mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{y} + \frac{1}{2}\mathrm{z} = 6 \Leftrightarrow$$
$$x + \frac{9}{2} + 4 = 6 \Leftrightarrow$$
$$x = -2.5$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

1. Εάν r<m και κάποιοι από τα b's είναι διαφορετικά του μηδενός το σύστημα είναι αδύνατο,
2. Εάν r<=m και τα b's=0 το σύστημα είναι συμβιβαστό

- Εάν r=n το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση (Cramer)

$$x_k = \frac{\det A_{x_k}}{\det A}$$

(Ακ ο πίνακας που προκύπτει από τον α εάν αντικατασταθεί η κ-στήλη με τα b's).

- Εάν r<n έχει άπειρες λύσεις

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + y + z + \omega = 1 \\ x + \alpha y + z + \omega = 1 \\ x + y + \alpha z + \omega = 1 \\ x + y + z + \alpha\omega = 1 \end{cases}$$

Λύση

Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}} = (\alpha+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+3)\begin{vmatrix} \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+3)(\alpha-1)^3$$

Αν $(\alpha+3)(\alpha-1)^3 \neq 0$
Το σύστημα έχει μοναδική λύση η οποία μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο Cramer.
Αν όμως παρατηρήσουμε ότι αν αλλάξουμε την θέση δύο αγνώστων το σύστημα δεν αλλάζει, τότε
x=y=z=ω και $(\alpha+3)x = 1$
Επομένως x=y=z=ω $= \frac{1}{(\alpha+3)}$
Αν $(\alpha+3)(\alpha-1)^3 = 0$
Για α=1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Η τάξη του πίνακα είναι 1.
Επομένως: x+y+z+ω=1

$$x = 1 - y - z - \omega$$

Και η λύση θα είναι $(x, y, z, \omega) = (1 - y - z - \omega, y, z, \omega)$

Αν α=-3

Το σύστημα έχει τάξη 3 αφού

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

Βρίσκουμε την τάξη του επαυξημένου πίνακα θεωρώντας μια υποορίζουσα

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-4\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-4(16) = -64$$

Η τάξη του επαυξημένου είναι 4 και είναι διαφορετική από την τάξη του συστήματος άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Ορισμός (Βαθμός-Rank)

- Έστω πίνακας $A \in M_n$. Βαθμός ή τάξη του πίνακα A ονομάζεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του κλιμακωτού ή και ανηγμένου πίνακα του A και έχει τον εξής συμβολισμό r(A). Ισχύει ότι:

$$r(A) \leq \min\{m, n\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix}$$

Πρόταση Το γραμμικό σύστημα **AX=B** έχει λύσεις εάν και μόνο εάν $rank(A) = rank(A|B)$

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα A=$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Λύση

$$detA = (-4)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)(-8+15) - (-4+30) - 6(3-12)$$
$$= -28 - 26 + 54 = 0$$

Επειδή η ορίζουσα είναι ίση με το 0 θα υπολογίσουμε τις υποορίζουσες (2×2)

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7$$

Μια τουλάχιστον είναι διαφορετική του μηδενός επομένως ο βαθμός του πίνακα είναι δύο   rank(A)=2

Άσκηση 2

Δίνεται ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & \alpha-2 & 1 \\ \beta & 0 & 2 \\ 4 & \beta-3 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν τα α, β ώστε ο πίνακας να έχει τάξη 2.

Λύση

Πρέπει όλες οι ελάσσονες ορίζουσες 3ης τάξης να είναι μηδέν και να υπάρχει τουλάχιστον μια ελάσσονα ορίζουσα δεύτερης τάξης διάφορη του μηδενός.

$$\det(A1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & \alpha-2 & 1 \\ \beta & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\begin{vmatrix} \alpha-2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-2 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2(\alpha-2) + \beta(\alpha-2) = (\alpha-2)(2+\beta)$$

Επομένως α=2 ή β=-2

$$\det(A2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & \alpha-2 & 1 \\ 4 & \beta-3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1\begin{vmatrix} \alpha-2 & 1 \\ \beta-3 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-2 \\ 4 & \beta-3 \end{vmatrix} =$$

$$[3(\alpha-2)-\beta+3]-[\alpha(\beta-3)-4(\alpha-2)]$$

$$= 7(\alpha-2)+(\beta-3)(\alpha+1)$$

$$\det(A3) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha-2 & 1 \\ \beta & 0 & 2 \\ 4 & \beta-3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-\beta\begin{vmatrix} \alpha-2 & 1 \\ \beta-3 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-2 \\ 4 & \beta-3 \end{vmatrix} =$$

$$-\beta[3(\alpha-2)-\beta+3]-2[\alpha(\beta-3)-4(\alpha-2)]$$

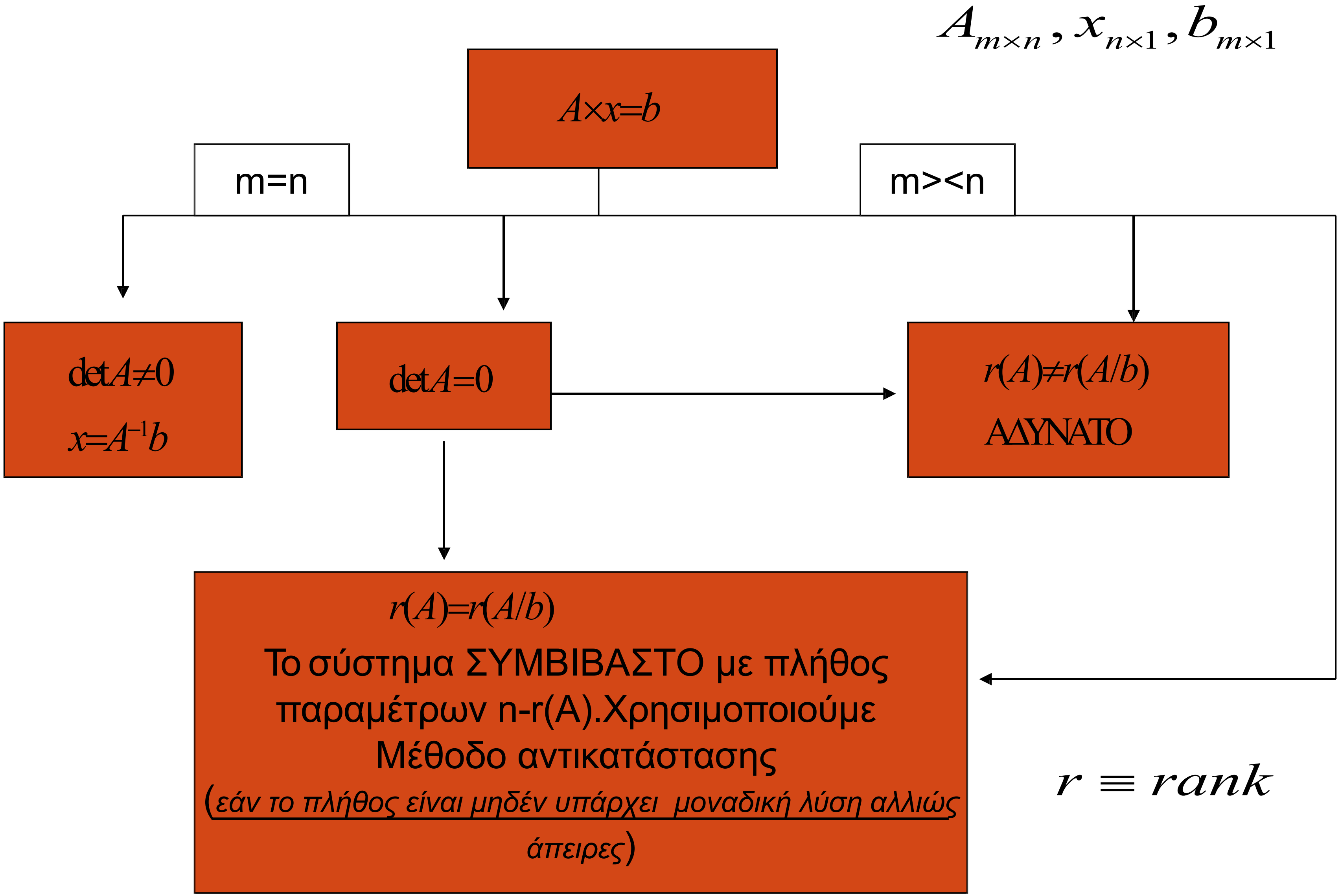
$$= (\alpha-2)(-3\beta+8)+(\beta-3)(1-2\alpha)$$

Παρόμοια προκύπτουν και οι υπόλοιπες υποορίζουσες

Για α=2 και β=3 υπάρχει η υποορίζουσα δεύτερης τάξης

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



$A_{m\times n}, x_{n\times 1}, b_{m\times 1}$
$A\times x=b$
m=n
m><n
$\det A\neq 0$
$x=A^{-1}b$
$\det A=0$
$r(A)\neq r(A/b)$
ΑΔΥΝΑΤΟ
$r(A)=r(A/b)$
Το σύστημα ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟ με πλήθος παραμέτρων n-r(A).Χρησιμοποιούμε Μέθοδο αντικατάστασης
(*εάν το πλήθος είναι μηδέν υπάρχει μοναδική λύση αλλιώς άπειρες*)
$r\equiv rank$

Παραδείγματα 1

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= \alpha \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί οι λύσεις σε όλες τις περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου α για το παρακάτω σύστημα.

$$x_1 + x_2 + ax_3 = a^2$$
$$x_1 + ax_2 + x_3 = a$$
$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Παράδειγμα 3

Ενας τραπεζικός οργανισμός προγραμματίζει την επένδυση 30000 εκ. Ευρώ σε δύο τομείς: στον τομέα 1 με απόδοση 6% και στον τομέα 2 με απόδοση 9%.Εάν το ολικό ποσό, που προέρχεται απο τα ετήσια έσοδα των προγραμματισμένων επενδύσεων είναι το ίδιο με το ποσό που θα κέρδιζε ο οργανσιμός εάν επένδυε το ίδιο ποσό με απόδοση 7% να υπολογισθούν τα ποσά επένδυσης που αντιστοιχούν στους τομείς 1 & 2.

Αντιστρέψιμος Πίνακας

- Ένας nxn πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν είναι γραμμοισοδύναμος με τον μοναδιαίο nxn πίνακα.
- Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω θεωρώ έναν πίνακα (Α/Ι) τον οποίο τον μετατρέπουμε σε κλιμακωτό πίνακα Χ. Συνεπώς ο (Α/Ι)(Χ/Β).

Εάν Χ=Ι τότε ο Α είναι αντιστρέψιμος και είναι ο Β.

Εάν Χ διαφορετικός του Ι ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος

Εύρεση αντίστροφου πίνακα

Ένας πίνακας $n \times n$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα.

Αν θέλουμε να βρούμε τον αντίστροφο ενός πίνακα A (αν υπάρχει) δημιουργούμε τον πίνακα $(\mathrm{A}|\mathrm{I})$ και με γραμμοπράξεις προσπαθούμε να καταλήξουμε στον πίνακα $(\mathrm{I}|\mathrm{B})$.

- Αν αυτό συμβεί τότε A^{-1}=B.
- Αν όχι τότε ο A δεν έχει αντίστροφο.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

ΛΥΣΗ

Ξεκινούμε με τον πίνακα της μορφής $(\mathrm{A}|\mathrm{I})$. Όπως είπαμε προσπαθούμε μέσω γραμμοπράξεων να έρθουμε στην μορφή $(\mathrm{I}|\mathrm{A}'')$. Εάν τα καταφέρουμε τότε ο πίνακας θα είναι αντίστροφος.

$$(\mathrm{A}|\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με (-2) και προσθέτοντάς την στην δεύτερη καθώς και με (-4) και προσθέτοντάς την στην τρίτη έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τώρα θα προσθέσουμε την δεύτερη γραμμή στην τρίτη. Ωστόσο θα αλλάξουμε την δεύτερη γραμμή πολλαπλασιάζοντας με το (-1). Αρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & . & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης πάνω από το στοιχείο (-1) της τρίτης γραμμής πράτουμε αναλόγως. Οπότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & . & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & . & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε και την τρίτη γραμμή με (-1) οπότε.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & . & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς για 3 αγαθά δίνονται παρακάτω ως εξής:

$$Q_1^s = -10 + P_1, Q_2^s = 2P_2, Q_3^s = -5 + 3P_3$$

$$Q_1^d = 20 - P_1 - P_3, Q_2^d = 40 - 2P_2 - P_3, Q_3^d = 10 + P_2 - P_1 - P_3$$

Να βρεθούν οι λύσεις που προκύπτουν απο την διάτύπωση των συνθηκών ισσοροπίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Μια μικρή κλειστή οικονομία περιγράφεται από ένα σύστημα εξισώσεων που δίνουν τις συνθήκες ισορροπίας στις αγορές αγαθών και χρήματος, τις σχέσεις IS, LM. Η αγορά αγαθών περιγράφεται απο τις παρακάτω εξίσώσεις (τμήμα IS):

$$C = 15 + 0.8(Y - T),\ T = -25 + 0.25Y$$

$$I = 65 - R, G = 94$$

Ενώ η αγορά χρήματος από τις $L = 5Y - 50R,\ M = 1500$

Όπου C η δαπάνη καταναλωτή, Y το συνολικό προιόν, T τα φορολογικά έσοδα, I οι επενδυτικές δαπάνες, R το επιτόκιο, G οι δημόσιες δαπάνες, L η ζήτηση και M η προσφορά χρήματος. Η τιμή ισορροπίας Y,R.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Το απλό μακροοικονομικό υπόδειγμα εισοδήματος μπορεί να παρουσιαστεί με κάποιες τροποποιήσεις ως εξής: $Y = C + I + G$, $C = aY' + b$

$Y' = Y - T, T = RY$

Πως θα το παρουσιάζατε ως ένα γραμμικό σύστημα; (Καλό θα ήταν να γίνει εφαρμογή και σε κλειστή οικονομία).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Για ποιες τιμές των α,b το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις και καμμία λύση;

$$x + y + az = 1$$
$$-2x - y + z = b$$
$$x - y + 2z = a$$

Ομοίως για το

$$x + y + z = 1$$
$$x + ay + az = b$$
$$x + a^2 y + 2az = ab$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Θεωρούμε μια οικονομία "Κευνσιανού τύπου" που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$C = 30 + 0.9Y, I = 130 - 100r, M_t = 0.1Y, M_s = 200 - 300r$$

$$M = 210(\pi\rho o\sigma\varphi o\rho\alpha \text{ χρηματος})$$

$$w = 20(\mu\iota\sigma\theta o\varsigma)$$

$$L_f = 500(\varepsilon\pi\iota\pi\varepsilon\delta o \text{ απασχολησης})$$

$$\text{Y}=60\sqrt{L},$$

Να υπολογίσετέ το εισόδημα, το επιτόκιο ισορροπίας καθώς και το επίπεδο απασχόλησης και τιμής στην ισορροπία. Μπορείτε να βρείτε το πόσο θα μεταβληθεί το επίπεδο της τιμής για να έχουμε πλήρη απασχόληση;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός υποδείγματος αγοράς τριών ανταγωνιστικών
προϊόντων δίνεται παρακάτω ως εξής:

$$Q_{D1} = 45 - 2P_1 + 3P_2 - 7P_3, Q_{S1} = -5 + 4P_1$$

$$Q_{D2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 3P_3, Q_{S1} = -19 + 5P_2$$

$$Q_{D3} = 30 - P_1 + 2P_2 - 8P_3, Q_{S1} = -5 + 4P_3$$

Να υπολογίσετε τις τιμές και τις ποσότητες ισορροπίας των τριών αυτών προϊόντων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Ο αριθμός κομματιών των προϊόντων Α, Β, Γ που πωλήθηκαν σε ένα κατάστημα ανά τετράμηνο του τελευταίου έτους και οι αντίστοιχες εισπράξεις δίνονται στον παρακάτω πίνακα

Τετράμηνο	Α	Β	Γ	Είσπραξη
I	121	95	206	4284
II	232	55	68	3820
III	59	110	45	3500

Να βρεθεί η τιμή μονάδας κάθε προϊόντος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης ενός υποδείγματος αγοράς 3 προϊόντων είναι:

$$q_{d1} = 2 - p_1 + p_2 + p_3$$
$$q_{d2} = 10 + p_1 - 2p_2 + p_3$$
$$q_{d3} = 5 + p_1 + p_2 - p_3$$
$$q_{s1} = -2 + 2p_1$$
$$q_{s2} = -2 + p_2$$
$$q_{s3} = -3 + 2p_3$$

Να βρεθούν οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας των 3 προϊόντων.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n), b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ δύο διανύσματα του R χώρου. Ως εσωτερικό γινόμενο ορίζουμε $\langle a,b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$ ενώ ως εξωτερικό γινόμενο ορίζεται $\|a\|\|b\|\cos\theta$ με θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα α,b και

$$\|\alpha.\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$
$$\|\beta.\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$$

τα αντίστοιχα μέτρα ή μήκος των διανυσμάτων a,b.

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω ένα τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n$ και ένα διάνυσμα $x \in M_{nx1}$ ώστε να ισχύει $Ax = \lambda x, x \neq 0$

Το λ ονομάζεται ιδιοτιμή (eigenvalue) του πίνακα Α και το x καλείται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του Α αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα καλούνται χαρακτηριστικά ποσά ή και ιδιοποσά. Η εύρεση των ιδιοποσών γίνεται από την λύση της εξίσωσης $Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda \mathrm{I})x = 0$

Για τον παρακάτω πίνακα να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές- Ιδιοδιανύσματα 1/2

Έστω ότι σε μια επαρχιακή πόλη υπάρχουν 2 πολυκαταστήματα Χ και Υ στα οποία παρατηρούμε την κινητικότητα των πελατών τους. Το πολυκατάστημα Χ από τον μήνα t στον επόμενο μήνα t+1 διατηρεί το 80% της πελατείας του και κερδίζει το 40% της πελατείας του Υ . Το πολυκατάστημα Υ από τον μήνα t στον επόμενο μήνα t+1 διατηρεί το 60% της πελατείας του και κερδίζει το 20% της πελατείας του Χ . Αν x_i και y_i ο αριθμός των πελατών των Χ και Υ κατά τον μήνα i, τότε ο αριθμός των πελατών τους κατά τον επόμενο μήνα t+1 είναι:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 0{,}8\, x_t + 0{,}4 y_t \\ y_{t+1} = 0{,}2\, x_t + 0{,}6 y_t \end{cases}$$

ή ισοδύναμα $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$

Έτσι αν $x_1 = 3000$ και $y_1 = 7000$ τότε για τον δεύτερο μήνα θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5200 \\ 4800 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές –Ιδιοδιανύσματα 2/2

Μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα (x, y) για το οποίο η μετακίνηση των πελατών από το Χ στο Υ ή αντίστροφα να συνοδεύεται από σταθερή κατανομή πελατών; Δηλαδή υπάρχει διάνυσμα (x, y) μη μηδενικό για το οποίο

$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ για κάποιον αριθμό λ;

Ισοδύναμα $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}4y = \lambda x \\ 0{,}2x + 0{,}6y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0{,}8 - \lambda)x + 0{,}4y = 0 \\ 0{,}2x + (0{,}6 - \lambda)y = 0 \end{cases}$

Για να έχει το παραπάνω ομογενές σύστημα και μη μηδενική λύση θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 0{,}8 - \lambda & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}4 = 0$$

Άρα λ=1 ή λ=0,4

Ιδιοτιμές τετραγωνικού πίνακα

Έστω Α $= (\alpha_{ij})$ τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Το λ θα ονομάζεται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή του Α αν υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $n \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathbb{O} \text{ ώστε}$$

ΑΧ=λΧ$\Leftrightarrow AX - \lambda X = \mathbb{O} \Leftrightarrow (AX - \lambda X) = \mathbb{O} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = \mathbb{O}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases},$$

για να έχει το ομογενές σύστημα και μη μηδενικές λύσεις :

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \mathrm{P}(\lambda) = 0$$

Το διάνυσμα X ονομάζεται χαρακτηριστικό διάνυσμα ή ιδιοδιάνυσμα. Το πολυώνυμο Ρ(λ) ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΙΣΡΟΩΝ-ΕΚΡΟΩΝ, ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ LEONTIEF

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΙΡΟΩΝ-ΕΚΡΟΩΝ

Αλληλοσχετιζόμενοι τομείς: η παραγωγή (εκροή) του ενός τομέα αποτελεί εισροή στην παραγωγική διαδικασία άλλων τομέων.

Ανάλυση εισροών-εκροών: εξετάζει με ποιόν τρόπο μπορούν να ταιριάξουν εισροές και εκροές με τους συνολικούς πόρους που είναι διαθέσιμοι στην οικονομία.

Ορισμός: Για μια οικονομία που αποτελείται από n αλληλοσχετιζόμενους τομείς παραγωγής ορίζουμε ως **τεχνολογικό πίνακα εισροών-εκροών του Leontief** ή πίνακα των ενδιάμεσων καταναλώσεων

$$A=\left[\alpha_{ij}\right]$$

Όπου α_{ij} η αξία της απαιτούμενης ποσότητας παραγωγής του τομέα i για μοναδιαία παραγωγή του τομέα j.

ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ και $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ τα διανύσματα

παραγωγής (x_i η
παραγωγή του τομέα i) και ζήτησης d_i η ζήτηση του τομέα i) για το διάνυσμα παραγωγής x που απαιτείται για να καλύψει ζήτηση d, τότε

$$\mathrm{x} = \mathrm{Ax} + \mathrm{d} \Leftrightarrow (I - A)x = d \Leftrightarrow x = (I - A)^{-1}d$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται ο πίνακας εισροών-εκροών Leontief μιας οικονομίας που αποτελείται από τρεις τομείς παραγωγής

$$A=\begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το διάνυσμα παραγωγής αν το διάνυσμα της ζήτησης είναι d=[2 1 1].

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΙΣΡΟΩΝ-ΕΚΡΟΩΝ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας εισροών-εκροών:
Εάν οι τελικές ζητήσεις από κάθε τομέα μεταβληθούν σε 500 από την γεωργία, 550 από την βιομηχανία και 300 από τις υπηρεσίες να υπολογιστούν οι συνολικές εκροές από κάθε τομέα.

		Εισροές				
εκροές		Γεωργία	Βιομηχανία	Υπηρεσίες	Άλλες ζητήσεις	Συνολικές εκροές
	Γεωργία	150	225	125	100	600
	Βιομηχανία	210	250	140	300	900
	Υπηρεσίες	170	0	30	100	300

Εφαρμογή

Μια οικονομία σε μια χώρα αποτελείται από τέσσερις βασικούς τομείς δραστηριότητας. Τον αγροτικό τομέα, τον βιομηχανικό, τον τομέα των υπηρεσιών και τον τομέα της ενέργειας. Για την παραγωγή αγροτικού προϊόντος αξίας 1 μονάδας απαιτούνται αγροτικό προϊόν αξίας 0.31, βιομηχανικό προϊόν αξίας 0.22, παροχή υπηρεσιών αξίας 0.24 και ενέργεια αξίας 0.12 μονάδων. Αντίστοιχα για την παραγωγή υπηρεσιών αξίας 1 μονάδας απαιτούνται αγροτικό προϊόν αξίας 0.15, βιομηχανικό προϊόν αξίας 0.12, παροχή υπηρεσιών αξίας 0.32 και ενέργεια αξίας 0.10. Επίσης για την παραγωγή βιομηχανικού προϊόντος αξίας 1 μονάδας θεωρούμε αγροτικό προϊόν αξίας 0.20, παροχή υπηρεσιών αξίας 0.22, βιομηχανικό προϊόν αξίας 0.30 και ενέργεια αξίας 0.15. Τέλος, για την παραγωγή ενέργειας αξίας 1 μονάδας επίσης απαιτείται αγροτικό προϊόν αξίας 0.08, βιομηχανικό προϊόν αξίας 0.27, υπηρεσίες αξίας 0.19 και ενέργεια αξίας 0.31.

Α) Πως θα εκφράζατε τον τεχνολογικό πίνακας της συγκεκριμένης χώρας;

Β) Ποια θα ήταν η προσφερόμενη ποσότητα προϊόντος κάθε τομέα, εάν το διάνυσμα ζήτησης είναι το παρακάτω; $D = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1800 \\ 3000 \\ 5000 \end{bmatrix}$

Η στήλη j του πίνακα τεχνολογικών συντελεστών του Leontief, περιέχει τις αξίες των εισροών από τους διάφορους τομείς που απαιτούνται για την παραγωγή προϊόντος μοναδιαίας αξίας του τομέα j. Προφανώς θεωρούμε ότι μια οικονομία σε μια χώρα αποτελείται από k αλληλοσχετιζόμενους τομείς παραγωγής με γραμμική τεχνολογία παραγωγής. Επίσης, κάθε τομές παράγει μόνο ένα προϊόν και για την παραγωγή του χρησιμοποιεί ως εισροές τις εισροές των άλλων τομέων. Με βάση τα παραπάνω έχουμε

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.15 & 0.20 & 0.08 \\ 0.24 & 0.32 & 0.22 & 0.19 \\ 0.22 & 0.12 & 0.30 & 0.27 \\ 0.12 & 0.10 & 0.15 & 0.31 \end{bmatrix}$$

Γνωρίζοντας ότι το διάνυσμα παραγωγής για να καλυφθεί η ζήτηση είναι

$$D = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1800 \\ 3000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$x = \left(I - A\right)^{-1} D$$

. Άρα, θα έχουμε ότι το διάνυσμα παραγωγής θα είναι

$$x = (I - A)^{-1} d = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.31 & 0.15 & 0.20 & 0.08 \\ 0.24 & 0.32 & 0.22 & 0.19 \\ 0.22 & 0.12 & 0.30 & 0.27 \\ 0.12 & 0.10 & 0.15 & 0.31 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2000 \\ 1800 \\ 3000 \\ 5000 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2.24 & 0.82 & 0.10 & 0.92 \\ 1.46 & 2.24 & 1.41 & 1.34 \\ 1.3 & 0.9 & 2.36 & 1.32 \\ 0.88 & 0.66 & 0.91 & 2.09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 1800 \\ 3000 \\ 5000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13838.95 \\ 17835.07 \\ 17915.09 \\ 16132.53 \end{bmatrix}$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ;

- Κεφάλαιο 15 από τους Ross-Lis
- Σημειώσεις και ασκήσεις από το E-class
- Παρακαλώ δείτε το υλικό με τις λυμένες ασκήσεις. Επιλύστε τις ασκήσεις που έχουν δοθεί!!!
- Κεφάλαιο 12ο-13ο Pemberton
- Κεφάλαιο 7ο απο Jacques!