

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ- ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

Μάθημα 12^ο Γραμμικές Εξισώσεις 2^{ης}
Τάξης

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης

Ομογενείς & μη Ομογενείς

Η γενική μορφή μιας γραμμικής
διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι
η παρακάτω:

$$y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0y = 0$$

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Για την επίλυση της συγκεκριμένης Δ.Ε
δοκιμάζουμε την λύση της μορφής $y = e^{\lambda t}$

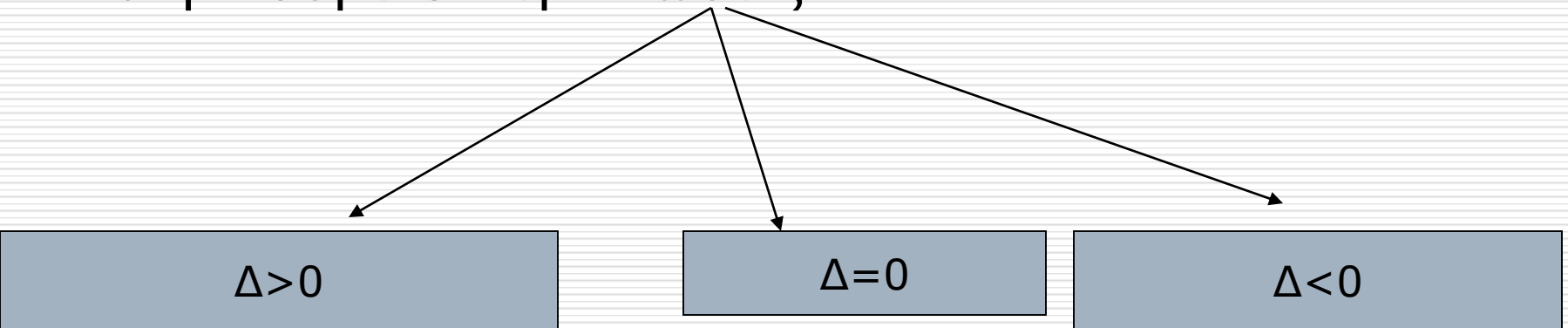
Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης Ομογενείς & μη Ομογενείς

Άρα θα έχουμε $\lambda^2 e^{\lambda t} + \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} + \alpha_2 e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2) = 0 \quad \mu\epsilon$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}$$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις

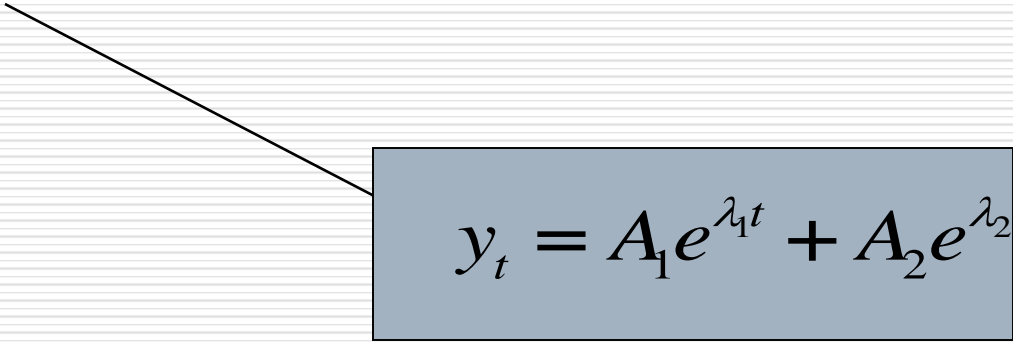


Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης Ομογενείς & μη Ομογενείς

Πρώτη Περίπτωση όπου $\Delta > 0$

Έχουμε δύο πραγματικές ρίζες $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

Γενική λύση


$$y_t = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης Ομογενείς & μη Ομογενείς

Δεύτερη Περίπτωση όπου $\Delta=0$

Έχουμε διπλή πραγματική ρίζα $\mu = \frac{-a_1}{2}$

και η $y_t = e^{\mu t}$ λύση της Δ.Ε. Θα έχουμε

$$2\mu e^{\mu t} + \mu^2 t e^{\mu t} + a_1 (e^{\mu t} + \mu t e^{\mu t}) + a_2 t e^{\mu t} \\ = (2\mu + a_1) e^{\mu t} + (\mu^2 + 2\mu a_1 + a_2) e^{\mu t}$$

Γενική λύση



$$y = e^{\mu t} (A_1 + A_2 t)$$

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 2^{ης} Τάξης Ομογενείς & μη Ομογενείς

Τρίτη Περίπτωση όπου $\Delta < 0$

Έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές

$$\lambda_{1,2} = u \pm iv,$$

$$u = \frac{-a_1}{2}, v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2}$$

$$y(t) = A_1' e^{(u+vi)t} + A_2' e^{(u-vi)t}$$

Γενική λύση

$$\longrightarrow y = e^{ut} (A_1 \cos(vt) + A_2 \sin(vt))$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

□ Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$1. y'' + y' - 6y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1$$

$$2. y'' + 8y' = 4e^{2x}$$

$$3. y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$$

$$4. y'' + 3y' - 4y = t^2$$

-
- Κεφάλαιο 14° Ross-Lis
 - Κεφάλαιο 26° Pemberton-Rau
 - Κεφάλαιο 6° Ξεπαπαδέας-Γιαννίκος
 - Κεφάλαιο Λουκάκης (τόμος Β)
-