ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ- ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

Μάθημα 11ο Γραμμικές Διαφορικές Riccati-Euler Multipliers

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση $1^{ης}$ Τάξης-Riccati

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης Riccati είναι η παρακάτω:

$$y'(x) + A(x) + B(x)y(x) + \Gamma(x)y^2(x) = 0$$

Η γενικής λύση της παραπάνω γραμμικής $1^{ης}$ τάξης Δ.Ε απαιτεί την γνώση μιας μερικής λύσης αυτής ειδάλλως είναι αδύνατη

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 1ης Τάξης

Για την διαφορική εξίσωση Riccati μπορούμε να έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

$$y'(x) + A(x) + B(x)\,y(x) + \Gamma(x)\,y^2(x) = 0$$

$$y^2(x) = y(x)$$

Γνώση μερικής λύσης

Γραμμική

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 1ης Τάξης-Riccati

Υποθέτουμε μια λύση της ΔΕ $y = y_1$. Η μερική λύση αυτή θα επαληθεύει την ΔΕ και άρα $y_1'(x) + A(x) + B(x)y_1(x) + \Gamma(x)y_1^2(x) = 0$

Θεωρούμε τον εξής μετασχηματισμό

$$y' = y_1' + w' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{dw}{dx} \quad (2) \longrightarrow \boxed{y = y_1 + \frac{1}{w}}$$

Άρα η ΔΕ Riccati θα εκφραστεί ως εξής:

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 1ης Τάξης-Riccati

(...Συνέχεια)

$$y_1' + w' + A(x) + B(x)(y_1 + w) + \Gamma(x)(y_1^2 + w^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_1' + w' + A(x) + B(x)y_1 + B(x)w + \Gamma(x)y_1^2 + \Gamma(x)w^2 = 0 \Leftrightarrow$$

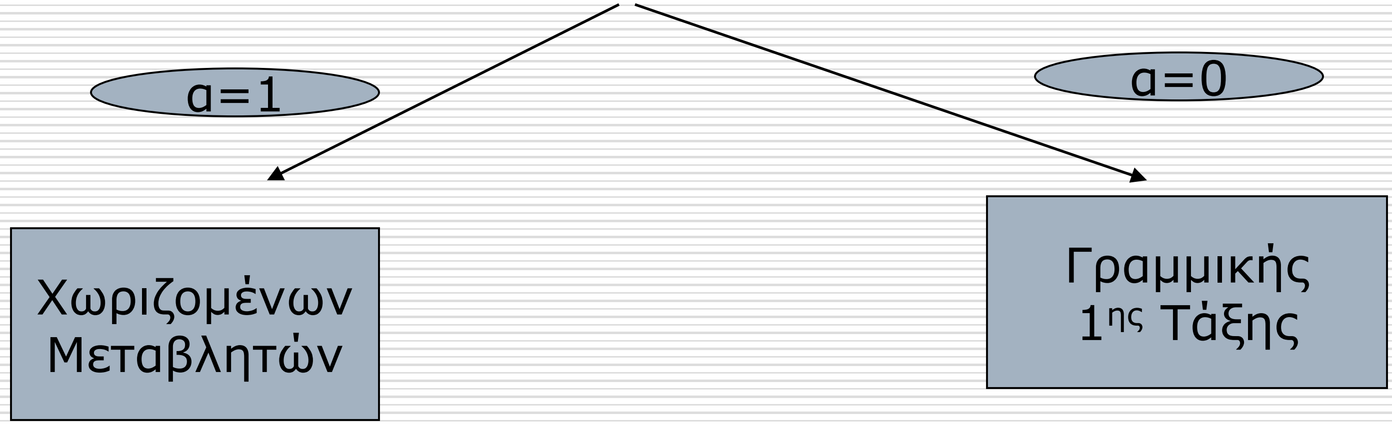
$$y_1' + A(x) + B(x)y_1 + \Gamma(x)y_1^2 + w' + B(x)w + \Gamma(x)w^2 = 0$$

Λόγω της (2) θα έχουμε ότι $w' + B(x)w + \Gamma(x)w^2 = 0$ η οποία είναι μια Bernoulli με εξαρτημένη τώρα την μεταβλητή w και λύνεται όπως έχουμε περιγράψει σε προηγούμενα μαθήματα.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

Η διαφορική εξίσωση Bernoulli έχει την παρακάτω μορφή:

$$y'(x) + A(x)y(x) + B(x)y^{a}(x) = 0, a \neq 1$$



ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BERNOULLI

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με y^{-a}
- Άρα θα έχουμε ότι

$$y' y^{-a} + A(x) y y^{-a} + B(x) y^{a} y^{-a} = 0$$

- Θέτουμε ότι $y^{1-a} = w \Leftrightarrow \left(y^{1-a}\right)' = (w)' \Leftrightarrow$

$$(1-a) y^{-a} y' = w'$$

- Άρα η Δ.Ε γίνεται

$$\frac{w'}{1-a} + Aw = B, \text{ η οποία είναι γραμμική}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης γνωρίζοντας ότι έχει ως μερική λύση την $y_1 = x$

$$xy' - y^2 + 2(x - 10y = x(x - 1)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

ΛΥΣΗ

Πρώτα θα πρέπει να εξετάσουμε εάν αποτελεί μια γραμμική πρώτης τάξης Riccati. Εάν μετασχηματίσουμε της διαφορική μας θα έχουμε ότι:

$$y' + (1 - x) + \frac{2(x-1)}{x} y - \frac{y^2}{x} = 0$$

Προφανώς είναι Riccati:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας τώρα τον εξής μετασχηματισμό

$$y = y_1 + \frac{1}{w} \Leftrightarrow y' = y'_1 - \frac{w'}{w^2} \quad (1)$$

Ίσον με μηδέν

θα έχουμε ότι:

$$y_1' - \frac{w'}{w^2} + (1-x) + \frac{2(x-1)}{x}\left(y_1 + \frac{1}{w}\right) - \frac{1}{x}\left(y_1 + \frac{1}{w}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_1' + (1-x) + \frac{2(x-1)}{x} y_1 - \frac{1}{x} y_1^2 - \frac{w'}{w^2} + \frac{2(x-1)}{x} - \frac{2}{x} y_1 \frac{1}{w} - \frac{1}{x}\frac{1}{w^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{w'}{w^2} + \frac{2(x-1)}{x} - \frac{2}{x} y_1 \frac{1}{w} - \frac{1}{x}\frac{1}{w^2} = 0 \Leftrightarrow$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οπότε θα έχουμε ότι:

$$-\frac{w'}{w^2}+\frac{2(x-1)}{x}-\frac{2}{x}y_1\frac{1}{w}-\frac{1}{x}\frac{1}{w^2}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$-w'-\frac{2}{x}w=-\frac{1}{x} \quad (2)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική συνεπώς:

$$w=e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left[c-\int \frac{1}{x}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right]=e^{-\ln x^2}\left[c-\int \frac{1}{x}e^{\ln x^2}dx\right]=$$

$$=\ldots=\frac{1}{x^2}\left[c-\frac{x^2}{2}\right]=\frac{2c-x^2}{2x^2}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστώντας τώρα την λύση στον μετασχηματισμό μας θα έχουμε ότι την παρακάτω γενική λύση για την ΔΕ μας:

$$y = x + \frac{2x^2}{2c - 2x^2}$$

ΛΥΣΗ

$$\square\square y\square x\square \square \square \left(x\left(\square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,\text{Hypergeometric1F1}\square 1\square \frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square \square \square 1\square\sqrt{2}\square \square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,\text{Hypergeometric1F1}\square 1\square\frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square \square\right.\right.$$

$$\sqrt{2}\left(1\square\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,\text{Hypergeometric1F1}\square 2\square\frac{1}{2\sqrt{2}},3,2\sqrt{2}\,x\square \square$$

$$C\square 1\square \left(\square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,\text{HypergeometricU}\square 1\square\frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square \square \square 1\square\sqrt{2}\square \square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,\text{HypergeometricU}\square 1\square\frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square \square\right.$$

$$\left.\left.\left.2\sqrt{2}\left(1\square\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,\text{HypergeometricU}\square 2\square\frac{1}{2\sqrt{2}},3,2\sqrt{2}\,x\square\right)\right)\right)\square$$

$$\left(\square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,\text{Hypergeometric1F1}\square 1\square\frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square \square \square^{\square\left(1\square\sqrt{2}\right)x}\,x\,C\square 1\square\,\text{HypergeometricU}\square 1\square\frac{1}{2\sqrt{2}},2,2\sqrt{2}\,x\square\right)\square\square$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε 1ης τάξης:

$$1.\ 2xy' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$$

$$2.\ (1 - x^3)y' = y^2 - x^2 y - 2x$$

$$3.\ y' + y^2 = \frac{2}{x^2}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \ (3)$ όπου οι συναρτήσεις f(x,y),g(x,y) είναι ορισμένες σε διάστημα D.
Εάν υπάρχει διαφορίσιμη h(x,y):

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = dh(x,y)$$

η παραπάνω εξίσωση (3) θα καλείται ακριβής.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

- Κριτήριο ακρίβειας:

Έστω ότι οι συναρτήσεις f(x,y) και g(x,y) έχουν συνεχείς παραγώγους στο D, όπου D είναι ένα ανοιχτό και απλά συνεκτικό χωρίο στο R^2. Τότε η (3) είναι ακριβής αν και μόνον αν ισχύει η ισότητα $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΟΛΙΚΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ

- Για την επίλυση μιας ακριβούς ΔΕ βρίσκουμε μια συνάρτηση h(x,y) όπου

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = f(x,y), \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} = g(x,y)$$

Να λυθεί η ακόλουθη ΔΕ

$$\left(x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + y\right)dy = 0$$

$$\text{Λύση } f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^2}{2} + m = c_1$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ EULER

- Η ιδέα του πολλαπλασιαστή euler είναι η εξής: Εάν έχουμε μια ΔΕ της μορφής

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0 \text{ , μη ακριβής}$$

Η οποία δεν είναι ακρινής αναζητούμε μια κατάλληλη συνάρτηση m(x,y) έτσι ώστε η δοσμένη ΔΕ με πολλαπλασιασμό με την m(x,y) να μετατραπεί σε ακριβής.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$1.\ 2xydy + (x^2 + y^2)dx = 0$$

$$2.\ (x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

$$3.\ y'(2xy - e^{-2y}) + y = 0$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 23ο απο Pemberton-Rau
- Κεφάλαιο 19ο Λουκάκη
- Κεφάλαιο 5 (Τόμος Β) Ξεπαπαδέας-Γιαννίκος