

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ- ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ

Μάθημα 10^ο Γραμμικές Διαφορικές
Εξισώσεις 1^{ης} Τάξης

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} Τάξης

Η γενική μορφή μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η παρακάτω:

$$y'(x) + A(x)y(x) = B(x)$$

Η γενική λύση της παραπάνω γραμμικής 1^{ης} τάξης Δ.Ε είναι η εξής:

$$y(x) = e^{-\int A(x)dx} \left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx} dx \right]$$

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} Τάξης

Διαφορική Εξίσωση 1^{ης} Τάξης

Στην περίπτωση όπου $B(x)=0$ τότε ουσιαστικά μιλάμε για την ομογενή γραμμική η οποία και επιλύεται με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών.
καλείται συνήθης διαφορική εξίσωση.

$$y'(x) + A(x)y(x) = B(x)$$

$$B(x)=0$$

Λύση Προηγούμενης
Μορφής

Ομογενής: Μέθοδος
Χωριζομένων

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και να βρεθεί μερική λύση για $x=1, y=0$.

$$x y' + 2 y = 3 x$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

ΛΥΣΗ

Πρώτα θα πρέπει να εξετάσουμε εάν αποτελεί μια γραμμική πρώτης τάξης. Εάν διαιρέσουμε με x θα έχουμε ότι: $y' + \frac{2y}{x} = 3$, γραμμική με $A(x) = \frac{2}{x}$, $B(x) = 3$
Προφανώς η λύση θα είναι της μορφής:

$$y = e^{-\int A(x)dx} \left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx} dx \right] = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[c + \int 3e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right] =$$
$$= e^{-2 \ln|x|} \left[c + 3 \int e^{2 \ln|x|} dx \right] = e^{-\ln|x|^2} \left[c + 3 \int e^{\ln|x|^2} dx \right] = e^{-\ln x^2} \left[c + 3 \int x^2 dx \right] =$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

ΛΥΣΗ

$$y = e^{-\int A(x)dx} \left[c + \int B(x)e^{\int A(x)dx} dx \right] = \dots =$$

$$= \frac{1}{x^2} \left[c + 3 \int x^2 dx \right] = \frac{1}{x^2} \left[c + x^3 \right] \Leftrightarrow y = \frac{[c + x^3]}{x^2}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την συνθήκη που μας δίνεται θα έχουμε ότι:

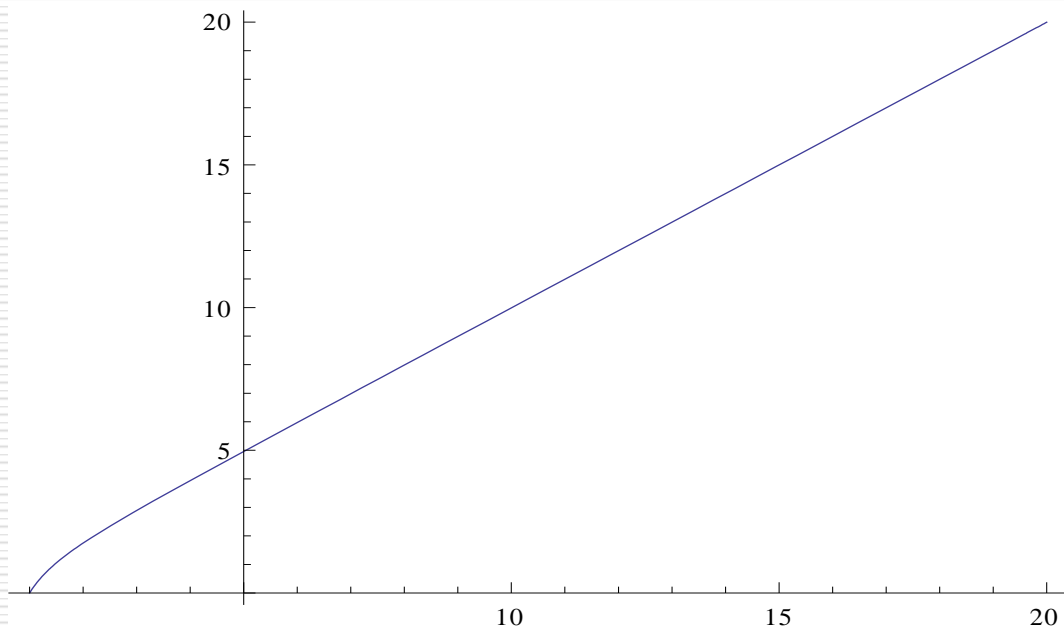
$$c = -1 \Leftrightarrow y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

Η λύση της προηγούμενης ΔΕ δίνεται παρακάτω:

```
s2 | DSolve | y | x | 2 y | x | x | 3, y | x | , x |
```

$$y(x) = x \frac{C_1 - 1}{x^2}$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

□ Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε 1^{ης} τάξης:

$$1. y' + \tan(x)y + x \cos(x) = 0$$

$$2. y' + y \sin(x) = \sin^3(x)$$

$$3. y' + y/x = \sin(x)$$

$$4. (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$$

$$5. dy = 3y dx + x e^{3x} dx, M(0, 1)$$

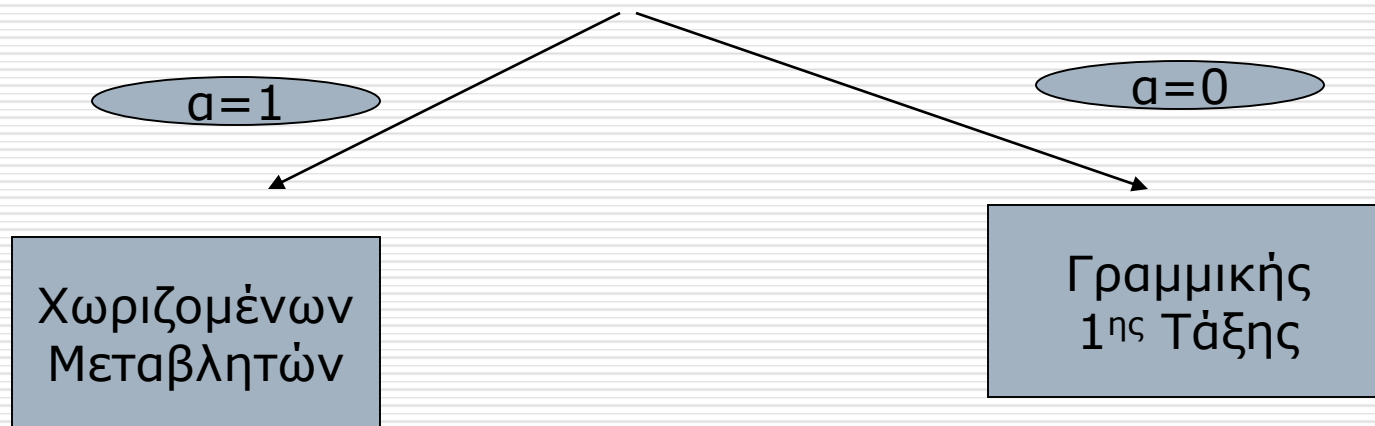
Εφαρμογή στα Οικονομικά

Μια επιχείρηση αποφασίζει να καταθέσει ένα αρχικό ποσό του 1 εκ euro σε μια τράπεζα με επιτόκιο $r=8\%$. Εάν το ύψος των καταθέσεων δίνεται ως $y(t)=50000t+1000000$ πόσα χρήματα θα έχει μετά από 10 έτη;
(δίνεται ότι $y'(t)-ry=y(t)$)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

Η διαφορική εξίσωση Bernoulli έχει την παρακάτω μορφή:

$$y'(x) + A(x)y(x) + B(x)y^a(x) = 0, a \neq 1$$



ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BERNOULLI

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με y^{-a}
- Άρα θα έχουμε ότι

$$y' y^{-a} + A(x) y y^{-a} + B(x) y^a y^{-a} = 0$$

- Θέτουμε ότι $y^{1-a} = w \Leftrightarrow (y^{1-a})' = (w)' \Leftrightarrow$

$$(1-a) y^{-a} y' = w'$$

- Άρα η Δ.Ε γίνεται

$$\frac{w'}{1-a} + A w = B, \text{ η οποία είναι γραμμική}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

Να λυθεί η $y' - y - y^5 = 0$

ΛΥΣΗ

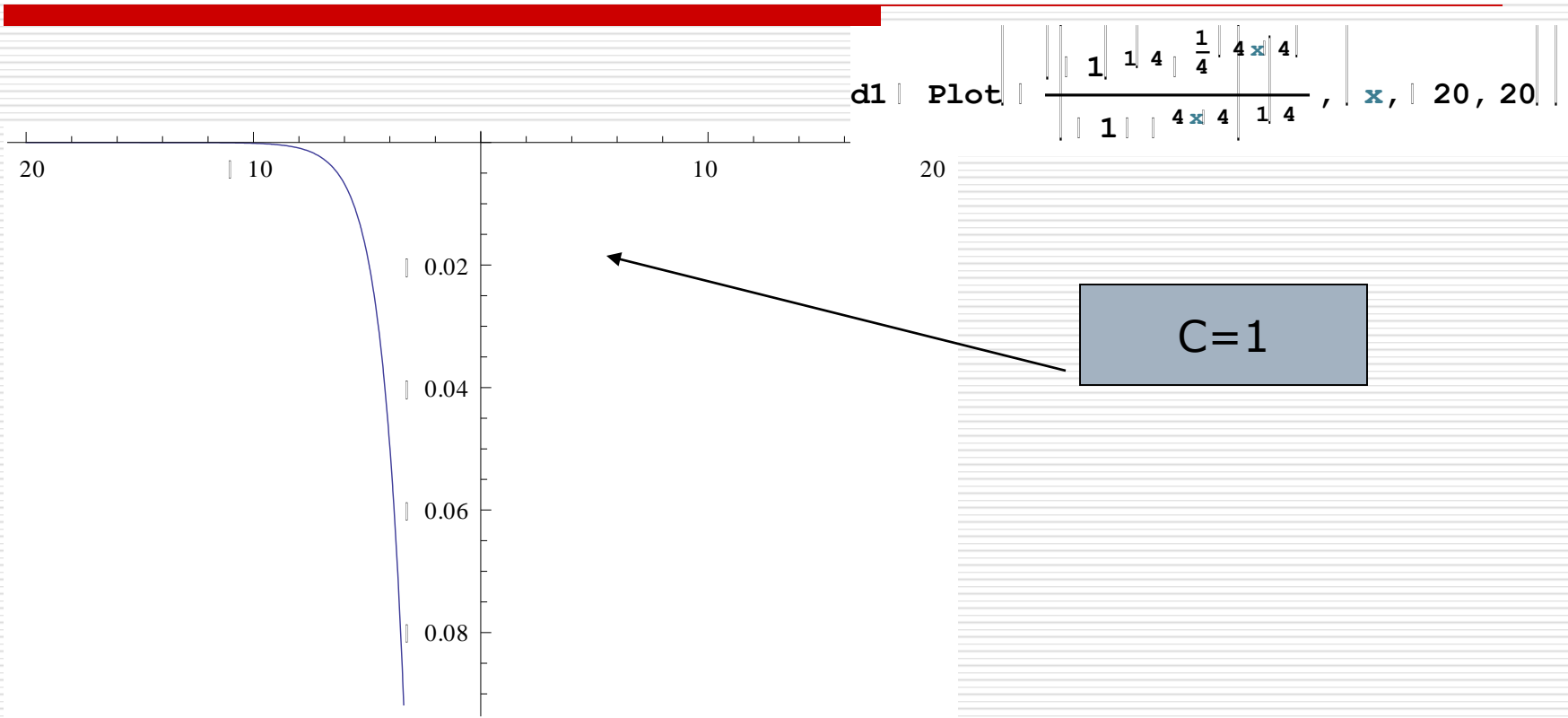
Προφανώς είναι της μορφής Bernoulli. Άρα θα πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με την ποσότητα y^{-5}

Οπότε γίνεται

$$y^{-5} y' - y^{-4} - 1 = 0,$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega \quad y^{-4} = w \Leftrightarrow (y^{-4})' = w' \Leftrightarrow y' = \frac{w'}{-4 y^{-5}}$$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΥΣΗΣ



ΕΦΑΡΜΟΓΗ (1)

Να λυθεί η $y' - y - y^5 = 0$

ΛΥΣΗ

Άρα η Δ.Ε παίρνει την κάτωθι μορφή:

$$w' + 4w + 4 = 0, \text{ γραμμική } \dot{\eta}$$

$$w = e^{-\int 4 dx} \left[c + \int 4 e^{\int 4 dx} dx \right] = \dots = c e^{-4x} - 1$$

Οπότε

$$y^{-4} = c e^{-4x} - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[4]{\frac{1}{c e^{-4x} - 1}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

□ Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$1. xy' + y = y^2 \ln x$$

$$2. y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

$$3. y' + y \frac{x}{1-x^2} = x\sqrt{y}$$

$$4. y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5$$

$$5. y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

Εφαρμογή στα Οικονομικά

Η προσφορά και η ζήτηση ενός εμπορεύματος δίνονται ως εξής:

$$Q_d = 80 - 4P^4(t) \sin t + 5P'(t),$$

$$Q_s = 120 + 8P^4(t) \sin t + 8P'(t) \cos 4t$$

Εάν την χρονική στιγμή $t=0$ η τιμή είναι 25 να υπολογίσετε την τιμή του εμπορεύματος.

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Κεφάλαιο 14^ο Piotr-Lis
 - Κεφάλαιο 23^ο απο Pemberton-Rau
 - Κεφάλαιο 19^ο Λουκάκη
 - Κεφάλαιο 5 (Τόμος Β) Ξεπαπαδέας-Γιαννίκος
-