ΜΑΘΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟ-ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ-ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)

Α. *Παράγωγος-Ελαστικότητα*

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση ζήτησης για το προϊόν Α της μορφής $Q_d = f(P_1, P_2)$ όπου P_1 η τιμή του προϊόντος και P_2 η τιμή ενός ανταγωνιστικού με μορφή $Q_d = 95 - 3P_1 + P_2$. Να υπολογιστεί η μερική ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή του προϊόντος εάν $P_1 = 10, P_2 = 25$.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζοντας την ελαστικότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$\varepsilon_{P_1} = \frac{\partial Q_D}{\partial P_1}\frac{P_1}{Q_D} = -3\frac{P_1}{Q_D}$. Με απλή αντικατάσταση έχουμε ότι $\varepsilon_{P_1} = -0.333$

Τι αυτή η ελαστικότητα σημαίνει;

Παράδειγμα 2 (Μόνοι σας)

Μια επιχείρηση παράγει 2 προϊόντα σε ποσότητες x,y και παρουσιάζει συνολικό κόστος με βάση την συνάρτηση $TC = 50 + x^3 + y\ln(20 + x) + x/(x+y)$. Να υπολογίσετε τα οριακά κόστη των 2 προϊόντων.

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας)

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης για το κρασί δίνεται από την εξής σχέση $Q = 205g^{1.3}p^{-1.6}r^{0.7}$ όπου Q η ποσότητα που ζητείται, p η μέση λιανική τιμή και g το μέσο εισόδημα και r η τιμή άλλων αγαθών. Να βρεθεί:

1. Η ελαστικότητα σε σχέση με την ζήτηση.
2. Η εισοδηματική ελαστικότητα σε σχέση με την ζήτηση.
3. Η σταυροειδής ελαστικότητα σε σχέση με την ζήτηση

(*Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την* $\ln Q = \ln 205 + 1.3\ln g - 1.6\ln p + 0.7\ln r$)

Παράδειγμα 4

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης είναι $Q = AK^a L^{1-a}$ όπου Κ το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και L η εργασία αντίστοιχα ενώ Α, α σταθερές με Α>0 και 0<α<1. Νε δείξετε ότι το οριακό προϊόν της εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

Λύση

Το οριακό προϊόν της εργασίας είναι $\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-a)A\frac{K^a}{L^a} > 0$ ενώ η παράγωγος του ως προς την εργασία δίνεται ως εξής: $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -a(1-a)A\frac{K^a}{L^{a+1}} < 0$

Παράδειγμα 5 (μόνοι σας)

Έστω η συνάρτηση παραγωγής με μορφή $Q = K^{4/5} L^{1/5}$ όπου Κ το χρησιμοποιούμενο κεφάλαιο και L η εργασία.

1. Ποια η οριακή παραγωγικότητα της εργασίας.
2. Ποια η οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου;
3. Εάν το κόστος των συντελεστών της οριακής παραγωγικότητας και κεφαλαίου είναι ίσο με την οριακή παραγωγικότητα του τότε η αμοιβή της εργασίας είναι 4 φορές η αμοιβή του κεφαλαίου.
4. Είναι η αμοιβή των συντελεστών ίση με την αξία παραγωγής;

Β. *Υπολογισμός Διαφορικού-Κανόνας Αλυσίδας*

Η συνολική μεταβολή σε μία συνάρτηση f(x,y) που προέρχεται από μια μικρή μεταβολή στα x,y καλείται διαφορικό. Γνωρίζουμε ότι $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ και για πολύ μικρά $\Delta x, \Delta y$ έχουμε ότι $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Το ολικό διαφορικό μας δίνει προσεγγιστικά την διαφορά τιμών μεταξύ των τιμών της συνάρτησης σε σημεία P(x,y) και P(x+Δx,y+Δy). Η διαφορά Δz-dz καλείται σφάλμα προσέγγισης.

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση παραγωγής ενός αγροτικού προϊόντος της μορφής

$Q(x,y) = 40x - x^2 + 60y - 2y^2$ όπου x οι μονάδες εργασίας και y η έκταση της γης.

Να υπολογιστεί το διαφορικό πρώτης τάξης για αύξηση κατά μία μονάδα σε x,y..

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = (40-2x)dx + (60-4y)dy$$

Άρα με βάση τα παραπάνω το διαφορικό μπορεί να υπολογιστεί με απλή αντικατάσταση ως $dQ = 40$.

(*Προσοχή; υπάρχει διαφοροποίηση από τα παραπάνω αποτέλεσμα με το εάν υπολογίσω την διαφορά* $Q(11,11) - Q(10,10) = ...$)

Παράδειγμα 2

Έστω ότι οι μονάδες που παράγει μια επιχείρηση σε μια χρονική περίοδο δίνεται από την σχέση $Q(x,y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ όπου x,y ο αριθμός των μονάδων από τους δύο παράγοντες που αντίστοιχα χρησιμοποιεί. Να εκτιμηθεί η μεταβολή στην παραγωγή όταν οι παράγοντες μεταβληθούν από (x=30,y=60) σε (x=31,y=60).

<u>Λύση</u>

Ο ρυθμός μεταβολής ως προς τον x-παράγοντα δίνεται ως εξής:

$Q_x(x,y) = 1200x + 2xy - 3x^2$. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την εξής διαφορά της μεταβολής ως: $Q(30,60) - Q(31,60) = 89400 - 91465 = 2069$ και να την συγκρίνουμε με το $Q_x(30,60) = 2100$. Τι μας λέει αυτή η διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές που υπολογίζουμε;

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ με χ το εργατικό δυναμικό και y το κεφάλαιο όπου $x=e^t, y=\ln(t+1)$ με t ο χρόνος. Να υπολογιστεί το $\frac{df}{dt}$. Ποιο το διαφορικό την περίοδο t=1.

<u>Λύση</u>

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του διαφορικού στην περίπτωση όμως που οι μεταβλητές της συνάρτησης είναι συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής θα έχουμε ότι

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(2x+y)e^t+(x+2y)\frac{1}{t+1}=(2e^t+\ln(t+1))e^t+(e^t+2\ln(t+1))\frac{1}{t+1}$$

Η παραγωγή την περίοδο t=1 δίνεται με απλή αντικατάσταση

$$\frac{df}{dt}=(2e+\ln(2))e+(e+2\ln(2))\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 4 (μόνοι σας)

Να βρείτε την μερική και ολική παράγωγο της συνάρτηση $f(x,y)=e^{xy}$ όπου $y=g(x)$

Παράδειγμα 5(μόνοι σας)

Εάν $z=\sin(x-y), x=uv, y=u-v$ να υπολογίσετε τα

$$\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση χρησιμότητας $u=x^2+xy$ με τον εισοδηματικό περιορισμό $xy=k$. Να υπολογιστούν τα διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι $du=f_x dx+f_y dy=(2x+y)dx+xdy$. Αλλά επειδή ισχύει ότι

$xy=k \Leftrightarrow dx=\frac{d}{dy}(ky^{-1})dy=-ky^{-2}dy$. Με απλή αντικατάσταση θα πάρουμε ότι

$du = (2x+y)dx + xdy = -(2x+y)ky^{-2}dy + xdy = \left[x-(2x+y)ky^{-2}\right]dy$. Για να υπολογίσουμε το διαφορικό δεύτερης τάξης θα εργαστούμε ως εξής:

$$d^2u = d(du) = d(f_x dx + f_y dy) = d(f_x dx) + d(f_y dy) =$$
$$= f_x d(dx) + d(f_x)dx + f_y d(dy) + d(f_y)dy =$$
$$= f_x d^2x + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_x dx + \frac{\partial}{\partial y} f_x dy\right)dx + f_y d^2y + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_y dx + \frac{\partial}{\partial y} f_y dy\right)dy =$$
$$= f_{xx}d^2x + f_{yy}d^2y + 2f_{xy}dxdy + f_x d^2x + f_y d^2y$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε τα εξής: $f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 0$

$d^2x = \frac{\partial}{\partial y}\left[-ky^{-2}\right]dy = 2ky^{-3}(dy)^2$ Με απλή αντικατάσταση υπολογίζουμε το d^2u

Παράδειγμα 7

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L) = 3\sqrt{K}\sqrt{L}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$K^2\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} + 2KLK^2\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} + L^2\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 0$$

Παράδειγμα 8

Έστω η συνάρτηση $z(x,y) = x^2y^3$ με $x = 2t, y = 3t^2$. Να βρείτε την ολική παράγωγο δεύτερης τάξης της z.

Παράδειγμα 9

Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση ο αριθμός $1.02^{3,01}$

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε την εξής συνάρτηση $z(x,y) = x^y$ με

$x = 1, y = 3, dx = 0.02, dy = 0.1$.Προφανώς η αρχική τιμή της συνάρτησης είναι 1. Η μεταβολή δίνεται με βάση το διαφορικό:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = ... = 0.06$. Άρα $1.02^{3,01}$=1+0,06=1,06.