ΜΑΘΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ)

Α. *Υπολογισμός Ορίζουσας*

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Λύση

Η λογική για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα έγκειται στην χρησιμοποίηση του θεωρήματος που έχει αναπτυχθεί στην θεωρία μα βάση είτε μία γραμμή είτε μια στήλη και το ανάπτυγμά της. Θα μπορούσαμε λοιπόν να αναπτύξουμε με βάση τα στοιχεία της πρώτης γραμμής οπότε θα έχουμε:

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3(10-6)-4(10+2)+1(6+2)=-28$$

Σημείωση: *Η εύρεση της τιμής μπορεί να γίνει και με γραμμοπράξεις.*

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Λύση

Αναπτύσσουμε κατά τας στοιχεία της $3^{ης}$ γραμμής όπου παρατηρούνται και τα περισσότερα μηδενικά.

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ... = 16$$

Προφανώς ο ίδιος υπολογισμός θα μπορούσε να γίνει ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης με (-5) και την προσθέτουμε στην πρώτης στήλη δημιουργώντας ένα ακόμα μηδενικό στοιχείο. Αναπτύσσω και υπολογίζω την ορίζουσα με βάση το στοιχείο 1 (α_{33}).

$$A=\begin{vmatrix} -14 & 0 & 3 & 4 \\ -10 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -14 & 0 & 4 \\ -10 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ομοίως χρησιμοποιώ το στοιχείο 1 της δεύτερης στήλης και τρίτης γραμμής και το προσθέτω ως στήλη στις δύο άλλες (*προσθέτω δηλαδή την δεύτερη στήλη στην πρώτη και στην τρίτη)*.

$$A'=\begin{vmatrix} -14 & 0 & 4 \\ -10 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 4 \\ -11 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ Αναπτύσσω ως προς το στοιχείο (α_{32}).

$$A'=\begin{vmatrix} -14 & 4 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = -28-(-44)=16$$

Παράδειγμα 3

Ας θεωρήσουμε την ορίζουσα $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1. Να υπολογίσετε τις ελάσσονες ορίζουσες M_{12} ,M_{23},M_{44}.
2. Τα αλγεβρικά συμπληρώματα A_{12} ,A_{23},A_{44}

<u>Λύση</u>

1. Για να υπολογίσουμε την ελάσσονα ορίζουσα M_{12} διαγράφουμε από την ορίζουσα Α της πρώτη γραμμή και την δεύτερη στήλη και παίρνουμε

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = ...=53$$

Την ίδια λογική θα χρησιμοποιήσουμε και για τις άλλες δύο ορίζουσες.

2. Γνωρίζουμε ότι $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

Άρα $A_{i12}=(-1)^{1+2}M_{12}=53$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα.

Παράδειγμα 4 (Μόνοι σας!!!!)

1. Να δείξετε ότι η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι ίσης με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.
2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2^{10} & 100 \\ 0 & 1 & 2^{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Β. *Υπολογισμός Αντίστροφου Πίνακα*

Στην συνέχεια παρατίθενται η μεθοδολογία για την εύρεση αντίστροφου πίνακα.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με την θεωρία που γνωρίζουμε ο αντίστροφος ενός πίνακα θα υπάρχει εάν η ορίζουσά του θα είναι διαφορετική του μηδενός και θα δίνεται από τον εξής τύπο $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$. Άρα το πρώτο βήμα είναι το να υπολογίσω την ορίζουσα του πίνακα Α.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = ... = 29 \neq 0$$

Το δεύτερο βήμα είναι η εύρεση του προσαρτημένου πίνακα

$adjA = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$.Πιο συγκεκριμένα,

$$adjA = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ όπου } c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \text{ κ.λ.π}$$

Αρα $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = {}^{1}\!/_{29} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2 (Μόνοι σας)

Να βρεθεί ο προσαρτημένος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές που βρήκατε να υπολογίσετε τον αντίστροφο.

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας)

Ποιοι από τους παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του $A^{2005}B^{2006}, \varepsilon\acute{\alpha}\nu$ α=5 ;

Παράδειγμα 4

Έστω ότι η απλή υποθετική οικονομία δύο βιομηχανικών μονάδων Α & Β παρουσιάζεται στον επόμενο πίνακα:

ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΟΜΑΔΑ	**ΤΕΛΙΚΗ ΖΗΤΗΣΗ**	**ΕΝΔΙΟΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΧΡΗΣΗ**		**ΣΥΝΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗ**
		Α	**Β**	
Α	**4**	**3**	**3**	**10**
Β	**5**	**1**	**0**	**6**

- Να διατυπωθεί το παραπάνω πρόβλημα για ν βιομηχανικές μονάδες, που η καθεμία παράγει έναν τύπο προϊόντος.
- Να βρεθεί η συνολική παραγωγή εάν η τελική ζήτηση μεταβληθεί σε 6.5 και 13 βιομηχανικές μονάδες Α & Β αντίστοιχα.