ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ-ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ-ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ & ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ασκηση 1 Να λυθεί για τις διάφορες τιμές των a,b το παρακάτω σύστημα

Απάντηση:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = b \\ x_1 + a^2 x_2 + 2ax_3 = ab \end{gathered}$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdot 1 \\ 1 & a & \alpha \cdot b \\ 1 & a^2 & 2a \cdot ab \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με (-1) και προσθέτοντας στις άλλες δύο γραμμές θα έχουμε να σχηματίζεται ο παρακάτω πίνακας:

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 0 & a-1 & \alpha - 1 & \cdot & b-1 \\ 0 & a^2-1 & 2a-1 & \cdot & ab-1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την δεύτερη γραμμή με την ποσότητα -(α+1) και προσθέτοντας στην τρίτη γραμμή

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 0 & a-1 & \alpha - 1 & \cdot & b-1 \\ 0 & 0 & -a(\alpha-2) & \cdot & a-b \end{bmatrix}$$

<u>Περίπτωση 1</u>: Για να έχουμε λύση θα πρέπει να ισχύει ότι: οι βαθμοί των πινάκων (επαυξημένου αλλά και του γραμμοισοδύναμου) rank(A/b)=rank(B)=rank(A) να ισούται, όπου Β θεωρείται ο γραμμοισοδύναμος πίνακας. Συνεπώς θα πρέπει το a διαφορετικό των 0, 1 και 2.

Αρα,

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ 0 & a-1 & \alpha - 1 & \cdot & b-1 \\ 0 & 0 & -a(\alpha-2) & \cdot & a-b \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$x_3 = \frac{a-b}{-a(\alpha-2)}$$

Επιστρέφοντας στην δεύτερη εξίσωση,

$$x_2 + x_3 = \frac{b-1}{a-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{b-1}{a-1} + \frac{a-b}{a(\alpha-2)}$$

Με την ίδια λογική υπολογίζουμε και το, $x_{1=}1 - x_2 - x_3$

Περίπτωση 2: Εστω ότι a=0. Τότε,

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdot 1 \\ 0 & -1 & -1 \cdot b-1 \\ 0 & 0 & 0 \cdot -b \end{bmatrix}$$

Υποπερίπτωση 1 Εάν το b είναι διαφορετικό του μηδενός τότε στο σύστημα μας είναι ΑΔΥΝΑΤΟ! (Προσέξτε ότι rank(A/b)=rank(B)=3 ενώ rank(A)=2)

Υποπερίπτωση 2 Εάν το b=0 τότε τη τρίτη εξίσωση παραλείπεται και το σύστημά μας έχει άπειρες λύσεις (Προσέξτε ότι rank(A/b)=rank(B)=2 ενώ rank(A)=2)

$$x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_3 - x_2$$

Οπότε έχουμε λύσεις της μορφής (0,1-k,k). Το k λαμβάνει τιμές στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Περίπτωση 3 Θεωρουμε τώρα ότι a=1

Υποπερίπτωση 1 Εάν το b είναι διαφορετικό του 1 και επειδή rank(A/b)=rank(B)=3 ενώ rank(A)=2 το σύστημά μας είναι αδύνατο.

Υποπερίπτωση 2 Εάν το b=1 τότε rank(A/b)=rank(B)=2 ενώ rank(A)=2 και έχουμε απειρία λύσεων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdot 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_3 - x_2$$

Οπότε έχουμε λύσεις της μορφής (1,1-k,0). Το k λαμβάνει τιμές στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Περίπτωση 4 Η τελευταία μας περίπτωση είναι το a=2

Υποπερίπτωση 1 Εάν το b είναι διαφορετικό του 2 και επειδή rank(A/b)=rank(B)=3 ενώ rank(A)=2 το σύστημά μας είναι αδύνατο.

Υποπερίπτωση 2 Εάν το b=2 τότε rank(A/b)=rank(B)=2 ενώ rank(A)=2 και έχουμε απειρία λύσεων.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \cdot 1 \\ 0 & 1 & 1 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε,

$$x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - x_3 - x_2$$

Οι λύσεις είναι της μορφής (0 , k, 1-κ). Το k λαμβάνει τιμές στο σώμα των πραγματικών αριθμών.

Ασκηση 2 ***Υποδείγματος Γενικής Ισορροπίας Walrass***

Οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς ενός υποδείγματος μιας αγοράς που υπάρχουν 3 ανταγωνιστικά προιόντα δίνεται ως εξής:

$$Q_{D1} = 2 - p_1 + p_2 + p_3$$
$$Q_{D2} = 10 + p_1 - 2p_2 + p_3$$
$$Q_{D3} = 5 + p_1 + p_2 - p_3$$

$$Q_{S1} = -2 + 2p_1, Q_{S2} = -2 + p_2, Q_{S3} = -3 + 2p_3$$

Απάντηση:

Θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες ισορροπίας για να σχηματίσουμε ένα σύστημα.

$$Q_{s_1} = Q_{D1} \Leftrightarrow$$
$$-2 + 2p_1 = 2 - p + p_2 + p_3 \Leftrightarrow$$
$$3\,p_1 - p_2 - p_3 = 4$$

Ομοίως για το δεύτερο αγαθό,

$$Q_{s_2} = Q_{D2} \Leftrightarrow$$
$$-2 + p_2 = 10 + p_1 - 2p_2 + p_3 \Leftrightarrow$$
$$-p_1 + 3p_2 - p_3 = 12$$

Η τρίτη εξίσωση θα προκύψει αναλόγως,

$$Q_{s_3} = Q_{D3} \Leftrightarrow$$
$$-3 + 2p_3 = 5 + p_1 + p_2 - p_3 \Leftrightarrow$$
$$-p_1 - p_2 + 3p_3 = 8$$

Οπότε σχηματίζεται ένα σύστημα 3x3 που έχει την εξής μορφή:¨

$$3p_1 - p_2 - p_3 = 4$$
$$-p_1 + 3p_2 - p_3 = 12$$
$$-p_1 - p2 + 3p_3 = 8$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -L & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8-4 \\ -2 & 3-2 \\ 0 & -44 \end{vmatrix} = \cdots = \\ = 16 \neq 0$$

Αρα το σύστημα μας έχει λύση και μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες ορίζουσες.

$$Dp_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 12 & 3 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 112$$

$$Dp_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 12 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 144$$

$$D\rho_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 28 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \cdots = 128$$

Συνεπώς οι λύσεις θα είναι P_1= 112/16=7 ,P_2=144/16=9 , P_3=128/16=8. Επιστρέφοντας στις εξισώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες ποσότητες. Οι λύσεις είναι 12, 7 και 13.

Ασκηση 3

Στην αγορά ενός αγαθού ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$C = C_0 + aY$$
$$I = I_0 + \beta Y + \gamma R$$
$$G = G_0$$

και η συνθήκη ισορροπίας $I = S, S = Y - C - G$ όπου S το εθνικό εισόδημα, C την κατανάλωση, G τις δημόσιες δαπάνες, I τις ιδιωτικές επενδύσεις και R το επιτόκιο. Στην αγορά χρήματος ισχύει ότι $M_t = kY$ (ζήτηση χρήματος για συναλλακτικούς σκοπούς), $M_s = -hR$ (ζήτηση χρήματος για κερδοσκοπία), $M_0 = L$ και η συνθήκη ισορροπίας L=M με $M_t + M_s = M$ ($0<\alpha<1$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta<1$, $k>0$, $h>0$). Να υπολογίσετε τις τιμές των Y και R για την κατάσταση ισορροπίας στις 2 αγορές.

Απάντηση:

Με βάση τις συνθήκες ισορροπίας στην αγορά του αγαθού προκύπτει ότι:

$$(1 - a - b)Y - \gamma R = C_0 + G_0 + I_0$$

Από την συνθήκη ισορροπίας στην αγορά χρήματος:

$$\kappa Y - hR = M_0$$

Αρα δημιουργείται ένα σύστημα δύο εξισώσεων της μορφής

$$(1-a-b)Y-\gamma R = C_0 + G_0 + I_0$$

$$\kappa Y - hR = M_0$$

Για να υπολογίσουμε τα Y* και R* θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα.

$$Y^* = \frac{\begin{vmatrix} C_0+G_0+I_0 & -\gamma \\ k & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\alpha-\beta & \gamma \\ \kappa & -h \end{vmatrix}}$$

$$R^* = \frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha-\beta & C_0+G_0+I_0 \\ k & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\alpha-\beta & \gamma \\ \kappa & -h \end{vmatrix}}$$

Οι λύσεις, $Y^* = \frac{-h(C_0+G_0+I_0)+\gamma M_0}{-h(1-\alpha-\beta)+\gamma k}$, $R^* = \frac{(1-\alpha-\beta)M_0-\kappa(C_0+G_0+I_0)}{-h(1-\alpha-\beta)+\gamma k}$,

Ασκηση 4

Μια κλειστή οικονομία περιγράφεται από ένα σύστημα εξισώσεων που παρέχουν τις τιμές ισορροπίας στις αγορές αγαθών και χρήματος IS και LM. Οι εξισώσεις δίνονται παρακάτω ως εξής (T: τα φορολογικά έσοδα, R: το επιτόκιο) :

$$C = 15 + 0.8(Y - T)$$
$$T = -25 + 0.25Y$$
$$I = 65 - R$$
$$G = 94$$

Η αγορά χρήματος του υποδείγματος περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\mathrm{L} = 5Y - 50R, M = 1500$$

(L: η ζήτηση για χρήμα, M: η σταθερή προσφορά χρήματος) . Ζητάτε να υπολογιστεί η τιμή ισορροπίας του Y και του R.

Απάντηση:

Στην πλευρά της αγοράς αγαθών και στην ισορροπία ισχύει η σχέση Y=C+I+G, ενώ στην πλευρά της προσφοράς χρήματος η L=M. Από την εξίσωση ισορροπίας στη αγορά του αγαθού έχουμε ότι $C = 15 + 0.8(Y + 25 - 0.25Y)$. Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε $Y = 485 - 2.5R$. Από την σχέση L=M, $Y = 300 + 10R$. Αρα σχηματίζεται ένα σύστημα της μορφής

$$Y + 2.5R = 485$$

$$Y - 10R = 300$$

Η ορίζουσα D=1*(-10)-1*2.5=-12.5. Υπολογίσουμε και τις άλλες δύο ορίζουσες. Βρίσκουμε ότι Y=448 και R=14.8.

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ασκηση 5

Έστω ότι σε μια επαρχιακή πόλη υπάρχουν 2 πολυκαταστήματα X και Y στα οποία παρατηρούμε την κινητικότητα των πελατών τους. Το πολυκατάστημα X από τον μήνα t στον επόμενο μήνα t+1 διατηρεί το 80% της πελατείας του και κερδίζει το 40% της πελατείας του Y . Το πολυκατάστημα Y από τον μήνα t στον επόμενο μήνα t+1 διατηρεί το 60% της πελατείας του και κερδίζει το 20% της πελατείας του X . Αν x_i και y_i ο αριθμός των πελατών των X και Y κατά τον μήνα i, τότε ο αριθμός των πελατών τους κατά τον επόμενο μήνα t+1 είναι:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 0{,}8\, x_t + 0{,}4 y_t \\ y_{t+1} = 0{,}2\, x_t + 0{,}6 y_t \end{cases}$$

ή ισοδύναμα $\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$

Έτσι αν $x_1 = 3000$ και $y_1 = 7000$ τότε για τον δεύτερο μήνα θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3000 \\ 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5200 \\ 4800 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα (x, y) για το οποίο η μετακίνηση των πελατών από το X στο Y ή αντίστροφα να συνοδεύεται από σταθερή κατανομή πελατών; Δηλαδή υπάρχει διάνυσμα (x, y) μη μηδενικό για το οποίο

$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ για κάποιον αριθμό λ;

Ισοδύναμα $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}4y = \lambda x \\ 0{,}2x + 0{,}6y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0{,}8-\lambda)x + 0{,}4y = 0 \\ 0{,}2x + (0{,}6-\lambda)y = 0 \end{cases}$

Για να έχει το παραπάνω ομογενές σύστημα και μη μηδενική λύση θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}4 = 0$$

Άρα λ=1 ή λ=0,4

Ασκηση 6

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Απάντηση: Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από την λύση του παρακάτω συστήματος

$$(A - \lambda I)\underset{x}{\rightarrow} = \left\{ \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \underset{x}{\rightarrow}$$

Το ομογενές σύστημα έχει λύση (-εις) εκτός της μηδενικής αν και μόνο εάν:

$$|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 \\ -8 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (9-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)=0$$

Αρα οι ιδιοτιμές είναι 1 (διπλή) και 9 απλή. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος. Οπότε για λ_1=1 θα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 9-1 & 0 & 0 \\ -5 & 1-1 & 0 \\ -8 & 6 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εκτελώντας τις πράξεις θα έχουμε:

$$-8x=0, -5x=0, -8x+6y=0$$

Συνεπώς $x=y=0$ οπότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$V=\{(0,0,k), k\epsilon R\}$$

Την ίδια λογική εφαρμόζουμε και στην περίπτωση όπου λ=2. Σε αυτήν την περίπτωση τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα έχουν την μορφή:

$\begin{bmatrix} 9-9 & 0 & 0 \\ -5 & 1-9 & 0 \\ -8 & 6 & 1-9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ οπότε οι λύσεις,

$$0=0, -5x+8y=0, -8x+6y-8z=0$$

Από τις εξισώσεις προκύπτει ότι

$$x=-\frac{8y}{5}, z=\frac{47y}{20}$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$V=\{(-32k, 20k, 47k), k\epsilon R\}$$