Επίλυση γραμμικών συστημάτων μέσω της μεθόδου Cramer-Rao-Ομογενές Σύστημα

Για ένα σύστημα nxn της μορφής **AX=b** θα ισχύει το εξής:

1) Εάν η ορίζουσα του συστήματος δεν είναι μηδέν δηλαδή $|D| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει την μοναδική λύση της μορφής:

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$$

όπου $Dx_1, Dx_2, Dx_3, \ldots, D_{x_n}$ οι ορίζουσες που προκύπτουν εάν αντικατσστήσουμε στην ορίζουσα D την στήλη των συντελεστών των $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ αντίστοιχα με την στήλη των σταθερών όρων.

2α) Εάν η ορίζουσα $|D| = 0$ και κάποια από τις ορίζουσες $Dx_1, Dx_2, Dx_3, \ldots, D_{x_n}$ είναι μη μηδενική τότε το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο).

2β) Εάν η ορίζουσα $|D| = 0$ και ισχύει ότι οι ορίζουσες $Dx_1 = Dx_2 = Dx_3 = \cdots = D_{x_n} = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Πρόταση Το γραμμικό σύστημα **AX=B** έχει λύσεις εάν και μόνο εάν $rank(A) = rank(A|B)$

Ασκηση 1 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα D του παραπάνω συστήματος.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2[1*1 - 2(-1)] - 3[4*1 - 2*1] + (-1)[4*(-1) - 1*(-1)]$$
$$= 6 + (-6) + 5 = 5$$

Καθώς η ορίζουσα είναι 5 διαφορετική του μηδενός το σύστημα μας έχει λύση η οποία έχει την εξής μορφή $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, x_3 = \frac{D_{x_3}}{D}$

Οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε τις επιμέρους ορίζουσες με

$$|D_{x1}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1*[1*1 - 2*(-1)] + (-3)[5*1 - 2*2]$$
$$+ (-1)[5*(-1) - 2*1] = 3 - 3 + 7 = 7$$

την

$$|D_{x2}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 * [5 * 1 - 2 * (2)] + (-1)[4 * 1 - 2 * 1] + (-1)[4 * 2 - 5 * 1]$$
$$= 2 - 2 - 3 = -3$$

και την

$$|D_{x3}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 * [2 * 1 - 5 * (-1)] + (-3)[4 * 2 - 5 * 1]$$
$$+ (1)[4 * (-1) - 1 * 1] = 14 - 9 - 5 = 0$$

Αρα, με βάση τα παραπάνω οι λύσεις θα είναι $x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = \frac{-3}{5}, x_3 = 0$

Ασκηση 2 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

Όπως και στο προηγούμενο μας παράδειγμα θα πρέπει να υπολογίσουμε την ορίζουσα D. Στην περίπτωση του συστήματός μας η ορίζουσα είναι

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα έχουμε ότι: $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 * [(-2) * (-1) - 1 * 1] + (-2)[1 * (-1) - 1 * 1] + (-2)[1 * 1 - 1 * (-2)] = 2 + 4 - 6 = 0$

Οπότε σύμφωνα με την πρόταση που έχει δοθεί στην θεωρία μας το σύστημά μας δεν έχει λύσεις (είναι αδύνατο).

Ασκηση 3 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα Α

$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$=……=-14. Επομένως $|A| = 1 \times 3 \times (-\frac{14}{3}) = -14 \neq 0$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα *Cramer-Rao*
Θεωρούμε τους πίνακες A_1, A_2, A_3 και υπολογίζουμε τις ορίζουσές τους ως εξής:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times \frac{14}{5} = 14$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times (-\frac{28}{3}) = -28$$

Έτσι προκύπτουν οι λύσεις του συστήματος:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \frac{|A_3|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{-14} \\ 0 \\ \frac{-28}{-14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Στην περίπτωση όπου όλοι οι σταθεροί όροι του συστήματος ΑΧ=Β ισούνται με το μηδέν (Β=0) τότε το σύστημά μας καλείται ομογενές. Συνεπώς για ένα ομογενές σύστημα ΑΧ=0

1) Εάν $|D| \neq 0$ τότε το σύστημα έχει μόν την μηδενική λύση

2) Εάν $|D| = 0$ τότε έχει άπειρες λύσεις. (***Προσοχή εδώ θα χρειαστείτε περαιτέρω διερεύνηση***)

Ασκηση 4 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα έχουμε ότι:$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 * [(-1) * (1) - 1 * 1] + (-2)[1 * (1) - 1 * 1] + (1)[1 * 1 - 1 * (-1)] = -4 + 0 + 2 = -2$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα είναι διαφορετική του μηδενός οπότε το σύστημα έχει ως λύση την μηδενική.

Ασκηση 5 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{gathered}$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα παρατηρούμε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = [(-1) * (1) - (-1) * 1] + (-1)[1 * (1) - 2 * 1] + (-1)[1 * (-1) - 2 * (-1)] = +1 - 1 = 0$

Εάν Α ο πίνακας ενός γραμμικού συστήματος nxm και $(A|B)$ο επαυξημένος του τότε:

1) Εάν $rank(A) = rank(A|B) = k < m$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις στις οποίες υπολογίζουμε τους k αγνώστους συναρτήσει των άλλων M-k αγνώστων.

2) Εάν $rank(A) = rank(A|B) = m$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση για ένα υποσύστημα mxm που αντισοιχεί σε μη μηδενική ορίζουσα.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε ο βαθμός του πίνακα Α είναι ίσος με 2. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τους δύο αγνώστους συναρτήσει του τρίτου.Μια μη μηδενική ορίζουσα του πίνακα Α είναι η $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2$. Η ορίζουσα αντιστοιχεί στην πρώτη και δεύτερη εξίσωση του συστήματος οπότε υπολογίζουμε τα x_1 και x_2 συναρτήσει της x_3.Αρα

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_1 - x_2 = -x_3 \end{gathered}$$

Συνεπώς οι λύσεις $(x_1, x_2, x_3) = (0, \kappa, \kappa), \kappa \in R$.