Μαθημα Επίλυση γραμμικών συστημάτων μέσω της μεθόδου απαλοιφής κατά Gauss-Εύρεση αντίστροφου πίνακα

Η μέθοδος της απαλοιφής κατά Gauss (Gauss Elimination) για την επίλυση των Γραμμικών Συστημάτων

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε μια δεύτερη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων που διαφέρει από την μέθοδο Cramer-Rao. Η μέθοδος απαλοιφής κατά Gauss αποτελεί μια πιο γενικευμένη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων η οποία χρησιμοποιείται και σε αρκετά προγραμματα Η/Υ. Εξετάζει όχι μόνο την περίπτωση όπου $m=n$ αλλά και τις περιπτώσεις όπου $m\neq n$ επιτρέποντας την διερεύνηση περιπτώσεων όπου οι αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος (αντίστοιχα μικρότερος) του αριθμού των αγνώστων. Η βασική θεώρηση της μεθόδου ορίζεται μέσω της χρήσης ενός γραμμοισοδύναμου πίνακα αλλά και των επιτρεπτών πράξεων που μπορούν να πραγματοποιηθούν σε ένα πίνακα. Ας θυμηθούμε όμως πρώτα τον ορισμό του κλιμακωτού και του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα:

Ορισμός κλιμακωτού πίνακα (echelon matrix)-Ανηγμένου κλιμακωτού

Ενας πίνακας θα είναι σε **κλιμακωτή μορφή** εάν:

1. Οι μη μηδενικές γραμμές του προηγούνται των μηδενικών γραμμών του.
2. Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (ηγετικό στοιχείο) κάθε γραμμής είναι σε δεξιότερη θέση από το αντίστοιχο μη μηδενικό στοιχείο της προηγούμενης γραμμής.

Επιπλέον λέμε ότι είναι σε **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** εάν εκτός από αυτά ισχύουν τα εξής:

1. Το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.
2. Κάθε στήλη που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής έχει όλα τα υπόλοιπα μηδενικά.

<u>Παράδειγματα</u>

(α) Ο πίνακας

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **δεν** είναι κλιμακωτός. (**Γιατί;**)

(γ) Ο πίνακας

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **δεν** είναι κλιμακωτός. (**Γιατί;**)

(δ) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι κλιμακωτός, αλλά είναι ανηγμένος; (**Γιατί;**)

Το παραπάνω είναι βασικό για την όλη διεργασία καθώς η χρήση της μεθόδου απαιτεί την δημιουργία ενός πίνακα ανηγμένου κλιμακωτού (ή και ανηγμένου) κατά την διάρκεια πραγματοποίησης των γραμμοπράξεων. Συνεπώς, στο ερώτημα τί θα κάνουμε αν ένας πίνακας mxn δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή η απάντηση αφορά κατ' αποκλειστικότητα τον λεγόμενο

επαυξημένο (augmented) πίνακα του και την χρήση των επιτρεπτών πράξεων για να έρθει σε αυτή την μορφή. Όπως γνωρίζουμε από τις προηγούμενες ενότητες οι επιτρεπτές πράξεις είναι:
1) η εναλλαγή των γραμμών ενός πίνακα,
2) ο πολλαπλασιασμός των γραμμών με σταθερές $\neq 0$,
2) η προσθαφαίρεση των γραμμών ενός πίνακα,
4) ο συνδυασμός μερικών ή/και όλων εξ αυτών
Τα παραπάνω μας δίνουν ένα γραμμο-ισοδύναμο σύστημα δηλαδή ένα σύστημα με τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Ορισμός Επαυξημένου Πίνακα Γραμμικού Συστήματος
Είναι ο mx(n+1) πίνακας που προκύπτει από την **επικόλληση** της στήλης **b** ως n+1 στήλης του A και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης τον γράφουμε απλώς ως (A|**b**).
Η αναλυτική εικόνα λοιπόν του νέου αυτού πίνακα είναι η εξής

$$A' = \left(\begin{array}{c:ccc|c} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & . & . & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & . & . & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right)$$

Όπως είδαμε στην βιβλιογραφία οι επιτρεπτές πράξεις αναφέρονται και ως **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί** ή και ως **γραμμοπράξεις**. Τα στοιχεία στα οποία θα εστιάσουμε για να μετατρέψουμε σε 1 ονομάζονται **στοιχεία- οδηγοί** ή απλώς **οδηγοί (pivots)** του πίνακα που έχουμε υπό εξέταση. Όταν τις επιτελούμε οι αντικαταστάσεις, που γίνονται επί των γραμμών του αρχικού πίνακα, θα συμβολίζονται ως $r_\iota \leftrightarrow r_\iota \pm r_j$, $r_\iota \leftrightarrow r_j, r_\iota \leftrightarrow \kappa r_\iota$ $r_\iota \leftrightarrow r_\iota + \kappa r_j$ (κ≠0)[1], όπου πρώτα γράφουμε την αρχική γραμμή και μετά αυτή που την αντικατέστησε.

Παράδειγμα 1

(α) A=$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$=B. Ήδη έχουμε πετύχει με τον B ένα Gauss κλιμακωτό πίνακα γραμμοϊσοδύναμο του A.

Παράδειγμα 2

(β) Είναι ο A_1=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ γραμμοϊσοδύναμος του A_2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Χρησιμοποιώντας τις επιτρεπτές πράξεις καταλήγουμε στον A2. Μπορείτε να καταλάβετε ποιες είναι αυτές οι πράξεις;

[1] Σε αρκετά συγράμματα χρησιμοποιούνται τα παραπάνω. Ωστόσο, δεν παρουσιάζουμε αλλά απλά αναφέρουμε τις πράξεις που γίνονται.

$$A_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Η μέθοδος επίλυσης του συστήματος μέσω της απαλοιφής κατά Gauss

Όπως είπαμε η μέθοδος της απαλοιφής (elimination process) του Gauss χρησιμοποιείτε ευρέως στην βιβλιογραφία. Η βασική της αρχή είναι το να οδηγηθούμε σε μια ισοδύναμη μορφή εκκινώντας από τον πίνακα A την $A_1^{'}$ X=b_1.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(I) Αν ο $A_1^{'}$ πίνακας, έχει τις (τελευταίες) πλήθους m- r $\geq$ 1 γραμμές του εξ ολοκλήρου μηδενικές και ένα έστω από τα β_{r+1}, … β_m της b_1 είναι $\neq 0$, τότε προφανώς το σύστημα είναι αδύνατον.

(II) Αν m $\geq$ r και β_{r+1}=… =β_m =0, τότε το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Ειδικότερα μάλιστα αν και r =n τότε το αρχικό μας σύστημα έχει μία και μοναδική λύση, ενώ αν r < n το σύστημα έχει άπειρες λύσεις : οι n-r από τους αγνώστους, από την r γραμμή και μετά, θα ορίζονται αυθαίρετα, ενώ οι υπόλοιποι άγνωστοι, πλήθους r, καθορίζονται πλήρως ξεκινώντας από την r γραμμή με διαδοχικές αναδρομικές αντικαταστάσεις

<u>Ασκηση 1</u> Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3$$

$$10x_1 - x_2 - 19x_{3+7}x_4 = 11$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο εξής:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 1 & : & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & : & 3 \\ 10 & -1 & -19 & 7 & : & 11 \end{bmatrix}$$

Στόχος μας είναι να προχωρήσουμε στην κατασκευή ενός γραμμοισοδύναμου πίνακα ανηγμένου (καλύτερα) ή μη ανηγμένου κλιμαλωτού. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με το 1/2 για να έχουμε μονάδα στο πρώτο στοιχείο της πρώτης γραμμής και στήλης οπότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & : & 1/2 \\ 3 & -1 & -5 & 2 & : & 3 \\ 10 & -1 & -19 & 7 & : & 11 \end{bmatrix}$$

Στην συνέχεια μηδενίζουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης (αυτά που βρίσκονται κάτω από το στοιχείο a_{11}). Αυτό θα γίνει εφικτό εάν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη γραμμή με τον αριθμό (-3) και την προσθέσουμε (ολόκληρη) στην δεύτερη γραμμή. Ομοίως ενεργούμε και για την Τρίτη γραμμή πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με (-10) και προσθέτοντάς την στην Τρίτη μας γραμμή Αρα, ο γραμμοισοδύναμος πίνακας που θα προκύψει είναι ο,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & : & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/7 & : & 3/7 \\ 0 & 14 & -14 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$$

Για λόγους απλοποίησης του συστήματός μας πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή μας με (3/2) και την προσθέτουμε στην πρώτη οπότε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/7 & : & 8/7 \\ 0 & 1 & -1 & 1/7 & : & 3/7 \\ 0 & 14 & -14 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$$

Στόχος μας πάλι είναι το να αποκτήσουμε μηδενικά κάτω από το στοιχείο (-1) της δεύτερης γραμμής. Για αυτό πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με το στοιχείο (-14) και την προσθέτουμε στην τρίτη μας γραμμή. Οπότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/7 & : & 8/7 \\ 0 & 1 & -1 & 1/7 & : & 3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 60 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακάς μας είναι ανηγμένος κλιμακωτός και αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$x_1 + 0x_2 - 2x_3 + \frac{5}{7}x_4 = \frac{8}{7}$$

$$0x_{1+}x_2 - x_3 + \frac{x_4}{7} = \frac{3}{7}$$

Επομένως η λύση του συστήματος θα είναι η εξής:

$$x_1 = 2x_3 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{8}{7}$$

$$x_2 = x_3 - \frac{x_4}{7} + \frac{3}{7}$$

Επομένως οι λύσεις:$(x_d, x_{21}x_3, x_4) = \left(2k - \frac{5u}{7} + \frac{8}{7}, k - \frac{m}{7} + \frac{.3}{.7}, k, m\right)$

$$k\mu \in R$$

Ασκηση 2 Ναλυθεί το σύστημα θεωρώντας το ως ομογενές

Λύστε πρώτα το ομογενές γραμμικό σύστημα $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = 0$ (δηλαδή με b =0)

Με γραμμοπράξεις επί του πίνακα A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, έχουμε $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

A_1, που είναι κλιμακωτός.

Το αρχικό ομογενές σύστημα είναι ισοδύναμο με το $A_1X=0$, X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix}$, που δίνει το ισοδύναμο

σύστημα με εξισώσεις { x+y+z+w+t=0 , t=0} και αφού r=2 συνεπάγεται ότι έχουμε άπειρες λύσεις με τρείς αγνώστους (ας πούμε τους y, z,w) απροσδιόριστους και λύσεις είναι x= -(y+z+w), t=0.

Σημειώστε πως, συνεχίζοντας, παίρνουμε τον Gauss κλιμακωτό πίνακα συντελεστών $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$($\leftrightarrow A_1$), με μικρό όφελος αφού οδηγεί τώρα σύστημα {x+y+z=0, t=0} κατευθείαν και χωρίς την μία και μοναδική αναδρομική αντικατάσταση που είχαμε κάνει πριν.

Ασκηση 3

Να λύσετε το προηγούμε σύστημα εάν τώρα b=$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$ (ως μη ομογενές).

Λύση του μη ομογενούς συστήματος

Με τις ίδιες πράξεις επί των στοιχείων της b έχουμε $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ -23 \\ -23 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$=$b_1$.

Ο νέος επαυξημένος ($A_1|b_1$) δείχνει ότι το αρχικό μη ομογενές σύστημα είναι συμβατό και ισοδύναμο του { x+y+z+w+t=7, t=23}, οπότε έχουμε άπειρες λύσεις, με τρεις αγνώστους (ας πούμε τους y, z,w) απροσδιόριστους και οι λύσεις είναι x= - (16+y+z+w), t=23.Τέλος, αν στον επαυξημένο πίνακα συνεχίζαμε τις γραμμοπράξεις μέχρι και την Gauss κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών, η στήλη των σταθερών θα ήταν τώρα $\begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (γιατί;) με πολύ μικρό όφελος και ως προς το πλήθος των πράξεων και ως προς την εξοικονόμηση του χρόνου εκτέλεσής των.

Ασκηση 4 Να λυθεί για κάθε $a \in R$ το σύστημα

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 - (\alpha + 2)x_2 + (\alpha + 1)x_3 = 0$$
$$4x_1 + (4 - 3\alpha)x_2 + (3\alpha - 2)x_3 = 0$$
$$\alpha(\alpha + 1)x_1 + \alpha^2 x_2 = 0$$

Ο πίνακας Α είναι ο κάτωθι αλλά εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τον επαυξημένου αυτού (A/b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -\alpha - 2 & \alpha + 1 \\ 4 & 4 - 3\alpha & 3\alpha + 2 \\ \alpha \cdot (\alpha + 1) & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζω την πρώτη γραμμή με ${}^{1}/_{2}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -\alpha - 2 & \alpha + 1 & 0 \\ 4 & 4 - 3\alpha & 3\alpha + 2 & 0 \\ \alpha \cdot (\alpha + 1) & \alpha^2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

Προσθέτω την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και στη συνέχεια πολλαπλασιάζω την πρώτη με -2 και την προσθέτω στην τρίτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -3\alpha & 3\alpha & 0 \\ \alpha \cdot (\alpha + 1) & \alpha^2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω την πρώτη γραμμή με $-\alpha \cdot (\alpha + 1)$ και την προσθέτω στην τέταρτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & a^2 + {}^{a}/_{2} & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω τη δεύτερη γραμμή με $-{}^{1}/_{\alpha}$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3\alpha & 3\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & a^2 + {}^{a}/_{2} & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω τη δεύτερη γραμμή με 3α και την προσθέτω στην τρίτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & a^2 + {}^{a}/_{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -{}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha^2 + {}^{\alpha}/_{2} & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω τη δεύτερη γραμμή με α και την προσθέτω στην τρίτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2+\alpha-2\alpha/2 & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω με -1 τη δεύτερη γραμμή και την προσθέτω στην πρώτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha/2 & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω την τρίτη γραμμή με $2/\alpha^2-\alpha$.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Προσθέτω την τρίτη γραμμή στη δεύτερη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Πολλαπλασιάζω την τρίτη γραμμή με $-1/2$ και την προσθέτω στην πρώτη.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα,

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

Ασκηση 5 Να λυθεί το σύστημα της μορφής:

$$\begin{cases} x+y-2z+3w=4 \\ 2x+3y+3z-w=3 \\ 5x+7y+4z+w=5 \end{cases}$$

Παρατηρώ: 4 αγνώστους και 3 εξισώσεις

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Επομένως $r(A) \neq r(A \mid b)$

Το σύστημα δεν έχει πραγματικές λύσεις (<u>αδύνατο</u>)

Ασκηση 6 Να λυθούν τα ακόλουθα συστήματα:

Α) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + \lambda z = 0 \end{cases}$

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & (\lambda+1)(1-\lambda) & 1-2\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda-4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda-6) & 0 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda-4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda-6) & 0 \end{array}\right)$$

Η παράσταση $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ επαληθεύεται για $\lambda = 2$ ή $\lambda = -3$

Έτσι διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -3$:

Τότε $r(A \mid b) = r(A)$ οπότε το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n - r(A) = 0$, όπως αυτές προκύπτουν από το σύστημα:

$$\begin{cases} x + \lambda y = 0 \\ 2(1-\lambda) y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Αν ακόμα $\lambda \neq 1$ τότε $x = y = 0$

Αν όμως $\lambda = 1$ ο πίνακας $(A \mid b)$ έχει την εξής μορφή:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Οπότε το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n - r(A) = 0$, όπως αυτές προκύπτουν από το σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -3z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}, \text{ οι οποίες γράφονται: } x = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \ y \in \Re$$

Αν $\lambda = 2$, τότε:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A \mid b) = r(A)$ και το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n - r(A) = 1$, όπως προκύπτουν από το σύστημα:

$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ -2y-2z=0 \end{cases}$, οι οποίες γράφονται: $x=\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$, $z\in\Re$

Αν $\lambda=-3$, τότε:

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A\mid b)$ και το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r(A)=1$, όπως προκύπτουν από το σύστημα:

$\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ 8y-7z=0 \end{cases}$, οι οποίες γράφονται: $x=\begin{pmatrix} \frac{5}{8}z \\ \frac{7}{8}z \\ z \end{pmatrix}$, $z\in\Re$

Β) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+(\theta+1)y+2z=\theta+1 \\ 3x+4y+(\theta+1)z=0 \end{cases}$

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \theta+1 & 2 & \theta+1 \\ 3 & 4 & \theta+1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \theta-1 & 0 & \theta-1 \\ 0 & 1 & \theta-2 & -3 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (\theta-2)(1-\theta) & 4(\theta-1) \\ 0 & 1 & \theta-2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \theta-2 & -3 \\ 0 & 0 & -\theta^2+3\theta-2 & 4(\theta-1) \end{array}\right)$$

Η παράσταση $-\theta^2+3\theta-2=0$ επαληθεύεται για $\theta=1$ ή $\theta=2$

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\theta\neq1$ και $\theta\neq2$:

Τότε $r(A)=r(A\mid b)$ οπότε το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r(A)=0$, όπως προκύπτουν από το σύστημα:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+(\theta-2)z=-3 \\ -(\theta-2)(\theta-1)z=4(\theta-1) \end{cases}$, οι οποίες γράφονται: $x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\theta-2} \\ 1 \\ \frac{-4}{\theta-2} \end{pmatrix}$

Αν $\theta=1$, τότε:

$$(A\mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A \mid b)$ και το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r(A)=1$, όπως προκύπτουν από το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y-z=-3 \end{cases}, \text{ οι οποίες γράφονται: } x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-2z \\ z-3 \\ z \end{pmatrix},\ z\in\Re$$

Αν $\theta=2$, τότε:

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Επομένως $r(A)\neq r(A \mid b)$

Το σύστημα δεν έχει πραγματικές λύσεις (<u>αδύνατο</u>)

Γ) $\begin{cases} x+2y+8z=0 \\ z+3y+7z=0 \\ x+5y+5z=0 \end{cases}$

Θεωρώ τον επαυξημένο πίνακα:

$$(A \mid b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A)=r(A \mid b)$, επομένως το σύστημα έχει πραγματικές λύσεις με πλήθος παραμέτρων $n-r(A)=1$, όπως προκύπτουν από το σύστημα:

$$\begin{cases} x+2y+8z=0 \\ \quad y-z=0 \end{cases}, \text{ οι οποίες γράφονται: } x=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10z \\ z \\ z \end{pmatrix},\ z\in\Re$$

Ασκηση 7 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Για να είναι ο πίνακας Α αντιστρέψιμος θα πρέπει η ορίζουσα να είναι διαφορετική του μηδενός.

$$\det\mathrm{A}=2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=2(4)-2(4)=0$$

Παρατηρουμε ότι ο πίνακας έχει ορίζουσα ίση με το μηδέν άρα δεν είναι αντιστρέψιμος.

Ασκηση 8 Να υπολογιστούν εάν υπάρχουν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων:

A) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$, $a\in\Re$

$|A| = 1\times a - 2\times 3 = ?$

Διακρίνω λοιπόν δύο περιπτώσεις:

Αν $a=6$, τότε:

$|A|=0$, επομένως ο πίνακας <u>δεν</u> αντιστρέφεται

Αν $a\neq 6$, τότε:

$|A|\neq 0$, επομένως ο πίνακας αντιστρέφεται

Απαλοιφή Gauss-Jordan

Θεωρώ τον πίνακα B:

$$B=\left(A \mid I_2\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & a & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & a-6 & -3 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{6-a} & \frac{1}{a-6}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{a}{a-6} & \frac{2}{6-a}\\ 0 & 1 & \frac{3}{6-a} & \frac{1}{a-6}\end{array}\right)$$

Επομένως,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{a}{a-6} & \frac{2}{6-a}\\ \frac{3}{6-a} & \frac{1}{a-6}\end{pmatrix}$$

B) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Απαλοιφή Gauss-Jordan

Θεωρώ τον πίνακα C:

$$C=\left(B \mid I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -15 & -8 & 3 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15}\end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

Επομένως,

Ασκηση 9

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Ξεκινούμε με τον πίνακα της μορφής $(A|I)$. Όπως είπαμε προσπαθούμε μέσω γραμμοπράξεων να έρθουμε στην μορφή $(I|A^{-1})$. Εάν τα καταφέρουμε τότε ο πίνακας θα είναι αντίστροφος.

$$(A|I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με (-2) και προσθέτοντάς την στην δεύτερη καθώς και με (-4) και προσθέτοντάς την στην τρίτη έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τώρα θα προσθέσουμε την δεύτερη γραμμή στην τρίτη. Ωστόσο θα αλλάξουμε την δεύτερη γραμμή πολλαπλασιάζοντας με το (-1). Αρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & . & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να μηδενίσουμε τα στοιχεία της τρίτης στήλης πάνω από το στοιχείο (-1) της τρίτηε γραμμής πράτουμε αναλόγως. Οπότε,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & . & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & . & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε και την τρίτη γραμμή με (-1) οπότε.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & . & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Αρα ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 10

Ένας τραπεζικός οργανισμός προγραμματίζει την επένδυση 30.000 χρηματικών μονάδων σε δύο τομείς: στον τομέα Ι με απόδοση 6% και στον τομέα ΙΙ με απόδοση 9%. Αν το ολικό ποσό, που προέρχεται από τα ετήσια έσοδα των προγραμματισμένων επενδύσεων, είναι το ίδιο, με το ποσό που θα κέρδιζε ο οργανισμός, εάν επένδυε το ποσό των 30.000 χρηματικών μονάδων, με απόδοση 7%, να υπολογισθούν τα ποσά επένδυσης που αντιστοιχούν στους τομείς Ι και ΙΙ.

Έστω x_1, x_2 τα χρηματικά ποσά που επενδύθηκαν στους τομείς Ι και ΙΙ αντίστοιχα, όπως προσδιορίζονται από το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} 0{,}06x + 0{,}09y = 0{,}07 \times 30.000 \\ x + y = 30.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 210.000 \\ x + y = 30.000 \end{cases}$$

Θεωρούμε τους εξής πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 210.000 \\ 30.000 \end{pmatrix},$$

έτσι ώστε $Ax = b$

Επειδή $|A| = 0$, χρησιμοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα της μορφής $(A \mid b)$:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 210.000 \\ 1 & 1 & 30.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 30.000 \\ 1 & 1 & 30.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 10.000 \\ 1 & 1 & 30.000 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30.000 \\ 0 & 1 & 10.000 \end{array}\right)$$

Επομένως $r(A) = r(A \mid b)$, δηλαδή το σύστημα έχει πραγματική λύση με πλήθος παραμέτρων $n - r(A) = 0$,

οι οποίες είναι:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.000 \\ 10.000 \end{pmatrix}$$