



**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023-**  
**2024**

**ΘΕΜΑ 1 ( Μονάδες 3)**

1. Έστω ότι μια επιχείρηση έχει συνάρτηση ολικών κερδών

$$P(q_1, q_2) = 20q_1q_2 - 4q_1^2 - 5q_2^2$$

Όπου  $q_1$  και  $q_2$  είναι οι παραγόμενες και πωλούμενες ποσότητες των προϊόντων  $Q_1$ ,  $Q_2$  αντίστοιχα. Για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος  $Q_1$  απαιτούνται 2 μονάδες ενός συντελεστή παραγωγής και για την παραγωγή κάθε μονάδας του προϊόντος  $Q_2$  απαιτούνται 5 μονάδες του συντελεστή αυτού που διατίθεται σε 40 μονάδες. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος υπό την παραπάνω συνθήκη (Μονάδες 2).

2. Για την συνάρτηση παραγωγής  $Q(K, L) = cL^{0.4}K^{-0.2}$ . Να υπολογιστεί το ποσοστό του κεφαλαίου  $K$  έτσι ώστε εάν ο παράγοντας της εργασίας αυξηθεί κατά 6% η παραγωγή να αυξηθεί κατά 2%. (Μονάδες 1)

**ΘΕΜΑ 2 ( Μονάδες 4)**

1. Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση  $y' = e^{3x-2y}$ , αν  $y(0) = 1$ . (Μονάδες 1)

2. Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα σε ποσότητες με αντίστροφες συναρτήσεις

$$p_1 = 70 - 2q_1 - q_2 - q_3$$

ζήτησης  $p_2 = 120 - q_1 - 4q_2 - 2q_3$ .

$$p_3 = 90 - q_1 - q_2 - 3q_3$$

Να υπολογίσετε τις ποσότητες για κάθε εγκατάσταση όπου η επιχείρηση μεγιστοποιεί τα κέρδη της όταν γνωρίζεται ότι το συνολικό κόστος είναι

$$TC(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2 + 2q_3q_2 + q_3^2 + q_1q_3. \text{ (Μονάδες 2)}$$

3. Να υπολογίσετε την Ιακωβιανή ορίζουσα του παρακάτω συστήματος συναρτήσεων

$$\begin{aligned} Q &= 2 - 0.5P + 0.02I \\ \text{ζήτησης και προσφοράς } Q &= -2 + 7.5P \end{aligned} \text{ (Μονάδες 0.5).}$$

4. Να υπολογιστεί η Εσσιανή ορίζουσα της συνάρτησης παραγωγής  $Q(K, L, E) = KL^2E^3$  στο σημείο  $A(1,1,1)$ . (Μονάδες 0.5)

**ΘΕΜΑ 3 ( Μονάδες 4)**

1. Η συνάρτηση συνολικού κόστους για μια επιχείρηση που παράγει δύο αγαθά δίνεται ως εξής  $TC(Q_1, Q_2) = Q_1Q_2^2 + Q_1^3Q_2^2$ . Η επιχείρηση γνωρίζει ότι τα δύο αυτά προϊόντα εξαρτώνται χρονικά με βάση τις παρακάτω σχέσεις  $Q_1 = 2 - 3t$ ,  $Q_2 = 4 + 5t$ . Μπορείτε να υπολογίσετε την μεταβολή του συνολικού κόστους της επιχείρησης στον χρόνο; (Μονάδες 1)



2. Η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή ενός αγαθού είναι ίση με  $-3$ . Να υπολογίσετε την συνάρτηση συνολικών εσόδων εάν η ζήτηση είναι ίση με  $5$  όταν η τιμή ισούται με  $2$ . (Μονάδες  $1$ )

3. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$  (Μονάδες  $0.5$ ).

4. Απαντήστε στα παρακάτω: (Μονάδες  $1.5$ )

**α.** Ποια (-ες) από τις παρακάτω προτάσεις είναι κατά την άποψή σας σωστή:

(α) Ένα σημείο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης όταν το ολικό διαφορικό της συνάρτησης μηδενίζεται σε αυτό.

(β) Διακρίνουμε την κοιλότητα ή κυρτότητα μιας συνάρτησης σε αυστηρή ή μη αυστηρή. Στην αυστηρή εκδοχή μπορούν να υπάρχουν επίπεδα μέρη.

(γ) Μια συνάρτηση  $n$  μεταβλητών, ορισμένη σε ένα κλειστό χωρίο του  $\mathbb{R}^n$ , έχει οπωσδήποτε τοπικά ακρότατα.

(δ) Μια συνάρτηση  $\varphi$  είναι σχεδόν κοίλη εάν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος σημείων  $u$  και  $v$  στο πεδίο ορισμού της, και για κάθε  $0 < \theta < 1$ , ισχύει  $\varphi(u) \leq \varphi(v) \Rightarrow \varphi[\theta u + (1 - \theta)v] \leq \varphi(v)$ .

**β.** Ποια (-ες) από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη:

(α) Ένα δεσμευμένο ακρότατο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης αυτής.

(β) Ο εφικτός χώρος ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης είναι το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης.

(γ) Τόσο το ορισμένο όσο και το αόριστο ολοκλήρωμα, αν και υπολογιστικά διαφέρουν, έχουν την ίδια «φυσική» έννοια.

(δ) Ένα πρόβλημα εύρεσης μεγίστου μιας συνάρτησης με περιορισμούς μπορεί να μην έχει συγκεκριμένη λύση.

**γ.** Η διαφορική εξίσωση:  $5 \left(\frac{a^4 b}{dp^4}\right)^5 + 7 \left(\frac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$ , με άγνωστη τη συνάρτηση  $b(p)$ , έχει βαθμό:

**δ.** Δίνονται οι διαφορικές εξισώσεις: Ποια (-ες) είναι γραμμικές;

$$(I) \quad y' = (\sin x)y + e^x \quad (II) \quad y' = (\sin y)x + e^x \quad (III) \quad y' = 5$$

**ε.** Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή:

(α) Μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών είναι πάντα πλήρης.

(β) Μια πλήρης εξίσωση είναι πάντα χωριζομένων μεταβλητών.

(γ) Και οι τρεις προτάσεις είναι σωστές.

(δ) Καμία πρόταση δεν είναι σωστή.

(ε) Μια γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης είναι πάντα πλήρης.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**



**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1**

1. Το κέρδος της επιχείρησης μεγιστοποιείται για  $Q_1=7.5$  ,  $Q_2=5$  με τα κέρδη να ισούνται με 4000.
2. Η απάντηση είναι -2%.

**ΘΕΜΑ 2**

1. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι  $e^{2y} = \frac{2}{3} e^{3x} + 2c, c = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3}$
2. Υπολογίζοντας τις παραγώγους καταλήγουμε σε ένα σύστημα  $3 \times 3$ . Οι τελικές λύσεις είναι  $Q_1 = 5,95, Q_2 = 6.43, Q_3 = 5$
3. Η Ιακωβιανή ισούται με -8.
4. Η Εσσιανή ισούται με 6.

**ΘΕΜΑ 3**

1. Η μεταβολή του συνολικού κόστους της επιχείρησης στον χρόνο ισούται με  $= -3(4 + 5t)^2 - 9(2 - 3t)^2(4 + 5t)^2 + 10(2 - 3t)(4 + 5t) + 10(4 + 5t)^3(2 - 3t)$
2. Η συνάρτηση εσόδων είναι  $TR = Q^3 \sqrt{\frac{40}{Q}}$
3. Ο αντίστροφος ισούται με  $A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -23 & 20 & -14 \\ 16 & -8 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
4. Σωστό το δ. Η Β είναι λάθος. Είναι 5<sup>ov</sup> βαθμού. Γραμμικές είναι οι Ι & ΙΙΙ. Σωστό το α.