ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 1 (5.5 Μονάδες)

1. Ερευνητής μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας διεξάγει μια έρευνα σχετική με τον χρόνο παραμονής συνδρομητών. Τα στοιχεία που έχει στην διάθεσή του αφορούν τον παρακάτω πίνακα μετάβασης από την μία κατηγορία στην άλλη $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ όπου οι γραμμές και οι στήλες αναφέρονται σε 4 διαφορετικές κατηγορίες «πακέτων» (1PLAY, 2PLAY, 3PLAY και 4PLAY) και κάθε στοιχείο δηλώνει την πιθανότητα μετάβασης για ένα χρόνο. Ο ερευνητής εξετάζει 1 εκατομμύριο συνδρομητές εκ των οποίων οι 500.000 ανήκουν στην πρώτη κατηγορία οι 200.000 στην δεύτερη και οι 300.000 στην τρίτη.

   a. Ποιος από τους παρακάτω πίνακες (σε χιλιάδες), $POP_1 = \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix}$ $POP_2 = \begin{bmatrix} 500 & 200 & 300 & 0 \end{bmatrix}$, περιγράφει τον υπό έρευνα πληθυσμό και γιατί (*Μονάδες 0.5*);

   b. Ποιος ο αριθμός συνδρομητών ανά έτος στις διάφορες κατηγορίες με βάση την πιθανότητα μετάβασης και πως τον ερμηνεύεται (*Μονάδες 0.5*);

   c. Ποιος ο αντίστροφος του πίνακα Π και ποια η τάξη αυτού *(Μονάδες 1*);

2. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις. $1.\left(x+y\right)dy = \left(x-y\right)dx, 2.y' + 2xy = 2x^3y^3$ (*Μονάδες 2*);

3. Για την παρακάτω συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L) = 100K^{1/3}L^{2/3}$ να υπολογίσετε την οριακή παραγωγικότητα του κεφαλαίου και της εργασίας καθώς και τις δεύτερης τάξεως παραγώγους (τι παρατηρείται;) (*Μονάδες 1.5*).

ΘΕΜΑ 2 (3.5 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση παράγει τρία προϊόντα Q_1, Q_2, Q_3 που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 - 2\Delta Q_2 - 3\Delta Q_3 &= 1 \\ 2\Delta Q_1 + 4\Delta Q_2 + 6\Delta Q_3 &= 2 \\ \Delta Q_1 + 2\Delta Q_2 + 3\Delta Q_3 &= 0 \end{aligned}$$

όπου ΔQ η διαφορά στην ποσότητα παραγωγής για 2 διαφορετικές χρονικές περιόδους. Να λυθεί το παραπάνω σύστημα. (*Μονάδες 2*).

2. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις χρησιμότητας

$$\begin{aligned} U_1(y_1, \mathrm{y}_2, x_1, x_2) &= 3y_1 + y_2^2 - x_1 - 3x_2^3 = 0 \\ U_2(y_1, y_2, x_1, x_2) &= y_1^3 - 2y_2 + 2x_1^3 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

για δύο άτομα που καταναλώνουν τέσσερα διαφορετικά αγαθά. Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}$ Εάν $y_1 = x_w = 1, \mathrm{y}_2 = 2, x_1 = 3$ τι σημαίνουν οι μερικές παράγωγοι που υπολογίσατε (*χρησιμοποιείστε 2 δεκαδικά ψηφία*) (*Μονάδες 1.5*);

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

1. Ο παρακάτω πίνακας παριστάνει τις ποσότητες που πουλάει μια επιχείρηση ανά ώρα σε δύο διαφορετικές τοποθεσίες $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. (*τι αυτά σημαίνουν;)* (*Μονάδες 1*).

2. Μια επιχείρηση πουλάει το προϊόν της σε τρεις διαφορετικές αγορές όπου σε κάθε μια αγορά έχει διαφορετική συνάρτηση ζήτησης

$$\begin{aligned} Q_1 &= 100 - 0,4P_1 \\ Q_2 &= 50 - 0,25P_2 \\ Q_3 &= 45 - 0,2P_3 \end{aligned}$$

. Εάν το συνολικό κόστος παραγωγής υπολογίζεται ως $TC = 15 + 25(Q_1 + Q_2 + Q_3)$ να υπολογιστούν οι ποσότητες που μεγιστοποιούν τα κέρδη της επιχείρησης αλλά και η ελαστικότητα ζήτησης για κάθε αγορά (*Μονάδες 2*).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Προφανώς $POP_2 = \begin{bmatrix} 500 & 200 & 300 & 0 \end{bmatrix}$. Ο αριθμός συνδρομητών δίνεται από το γινόμενο των πινάκων $\Pi * POP_2$.Δεν ορίζεται ο αντίστροφος πίνακας και η τάξη είναι 3.

2. Η πρώτη διαφορική εξίσωση των θεμάτων είναι ομογενής με τελική λύση $y^2 + 2y - x^2 = c$ ενώ η δεύτερη είναι κλασσικά μια Bernoulli. Εάν ακολουθηθεί σωστά η μεθοδολογική της αντιμετώπιση θα φτάσουμε σε μια λύση της παρακάτω μορφής: $y^2(x) = ce^{2x^2} + x^2 + 1/2$.

3. $$\begin{array}{l} MPK = \dfrac{100}{3} K^{-2/3} L^{2/3}, MPL = \dfrac{200}{3} K^{1/3} L^{-1/3} \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\dfrac{200}{6} K^{-5/3} L^{2/3} < 0, \dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\dfrac{200}{6} K^{1/3} L^{-4/3}, \dfrac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \dfrac{200}{6} K^{-2/3} L^{1/3} \end{array}$$. Η παρατήρηση που θα πρέπει να σημειωθεί είναι ότι αύξηση στο κεφάλαιο επιφέρει και αύξηση στην οριακή παραγωγικότητα της εργασίας.

ΘΕΜΑ 2

1. Ο επαυξημένος πίνακας που προκύπτει δίνεται παρακάτω $\left[A/b\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Αναλόγως προκύπτουν και οι λύσεις.

2. $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 9x_2^2 \\ -3x_3^2 & -1 \end{vmatrix}}{|J|}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6x_1^2 & -3x_3^2 \end{vmatrix}}{|J|}, J = 1 + 54x_1^2 x_2^2$. Με απλή αντικατάσταση υπολογίζουμε ότι $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1.48, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = -0.75$

ΘΕΜΑ 3

1. Οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2. Η συνάρτηση που θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι η εξής:
   $\Pi = (250 - 2,5Q_1)Q_1 + (200 - 4Q_2)Q_2 + (225 - 5Q_3)Q_3 - (15 + 25Q_1 + Q_2 - Q_3)$. Υπολογίζοντας τις πρώτες παραγώγους θα έχουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 250 - 5Q_1 - 25 = 0$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 200 - 8Q_2 - 25 = 0 .$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_3} = 225 - 10Q_3 - 2 = 0$$

Κάνοντας πράξεις υπολογίζουμε την εσσιανή αρνητική με 400 ενώ $|\mathrm{H}_1| = -5, |\mathrm{H}_2| = 40$ οπότε πρόκειται για μέγιστο. Οι ελαστικότητες υπολογίζονται εύκολα με βάση τον παρακάτω τύπο $\varepsilon - \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} \frac{\overline{\mathrm{P}}}{\overline{Q}}$.