



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

ΘΕΜΑ 1 (4 Μονάδες)

1. Η επιχείρηση χαρτοπολτού και χαρτικών προϊόντων ΧΑΡΤΕΞ Α.Ε παρουσιάζει την ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους  $TC = 64L + 15E$  όπου  $L$  ο αριθμός των εργατών που χρησιμοποιεί και  $E$  το ποσό της καταναλισκόμενης ενέργειας που καταναλώνεται σε εκατομμύρια τόνους. Η συνάρτηση παραγωγής της ΧΑΡΤΕΞ Α.Ε δίνεται ως εξής  $Q = 160L + 103E - 4L^2 - 1,03E^2$ . Να υπολογίσετε τις τιμές εργασίας και καταναλισκόμενης ενέργειας που ελαχιστοποιούν το κόστος παραγωγής εάν γνωρίζετε ότι η επιχείρηση επιθυμεί να παράγει 1000 τόνους προϊόντος. (Μονάδες 2)

2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής  $Q = \frac{aLK - bL^2 - cK^2}{aL + bK}$ . Είναι ομογενής και τι βαθμού; (Μονάδες 1)

3. Η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής  $Q = aL^a K^{1-a} - bL^b K^{1-b}$ ,  $0 < a, b < 1$  παρουσιάζει αύξουσες, φθίνουσες ή σταθερές αποδόσεις κλίμακας; (Μονάδες 1)

ΘΕΜΑ 2 (3 Μονάδες)

$$Q_{D1} = 45 - 2P_1 + 3P_2 - 7P_3,$$

1. Οι συναρτήσεις προσφοράς  $Q_{D2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 3P_3$ , και ζήτησης για τρία προϊόντα

$$Q_{D3} = 30 - P_1 + 2P_2 - 8P_3$$

$$Q_{S1} = -5 + 4P_1,$$

$Q_{S2} = -19 + 5P_2$ , δίνονται παραπάνω. Ποιες οι τιμές και οι ποσότητες ισορροπίας για τις

$$Q_{S3} = -6 + 2P_3$$

παραπάνω αγορές; (Μονάδες 2)



2. Να δείξετε ότι ο παρακάτω πίνακας  $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος.

(Μονάδες 1)

**ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)**

Ο πληθυσμός των ψαριών στις λίμνες A και B ως συνάρτηση του χρόνου αλιευτικής δραστηριότητας δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\text{Λίμνη A: } \Pi'(t) = \frac{1}{3t} \Pi + \frac{1}{3} t \Pi^{-1}, \Pi(1) = 2$$

$$\text{Λίμνη B: } \Pi'(t) = \frac{(\Pi^2 - t^2)(t-1)}{2t^2} + \frac{\Pi}{t}, \Pi(1) = -2$$

Ένας ερευνητής προσπαθεί να εξετάσει εάν οι συγκεκριμένες λίμνες θα έχουν έναν βιώσιμο πληθυσμό ψαριών (θεωρητικά υπερβαίνει τις 200 τόνους) τα επόμενα 10 χρόνια. Ποια είναι η άποψή σας;

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ*



## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

### ΘΕΜΑ 1

1. Η συνάρτηση που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι η εξής:

$L(L, E, \lambda) = 64L + 15E + \lambda(1000 - 160L + 13E + 4L^2 + 1.03E^2)$ . Υπολογίζοντας τις πρώτες

$$\frac{\partial L}{\partial L} = 64 + \lambda(-160 + 8L) = 0$$

παραγώγους θα έχουμε:  $\frac{\partial L}{\partial E} = 15 + \lambda(-103 + 2.06L) = 0$  . Διαιρώντας τις δύο

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1000 - 160L + 13E + 4L^2 + 1.03E^2 = 0$$

πρώτες εξισώσεις μπορούμε να έχουμε ότι  $L = 1,0986E - 34,9$  οπότε η κατανάλωση  $E$  θα έχει δύο τιμές 76, 276 και 26,723 (απορρίπτεται). Άρα  $L = 45,568$  και  $\lambda = 0,312$ . Για να εξετάσουμε το γεγονός της ελαχιστοποίησης θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης οι οποίες είναι  $\frac{\partial^2 L}{\partial L^2} = 2.06$ ,  $\frac{\partial^2 L}{\partial E^2} = 2,496$ ,  $\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 1,6049$ .

2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για την ομογενή συνάρτηση αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ομογενής συνάρτηση 1<sup>ου</sup> βαθμού.

3. Ομοίως η συνάρτηση παραγωγής  $Q = aL^a K^{1-a} - bL^b K^{1-b}$ ,  $0 < a, b < 1$  παρουσιάζει σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

### ΘΕΜΑ 2

1. Το σύστημα που έχουμε μετά από την εκτέλεση των ισοτήτων είναι

$$-6P_1 + 3P_2 - 7P_3 = -50$$

$$2P_1 - 6P_2 + 3P_3 = -35$$

$$-P_1 + 2P_2 - 10P_3 = -30$$

Οι λύσεις από το μη παραμετρικό σύστημα είναι  $P_1 = 8, P_2 = 11, P_3 = 5$  ενώ αντίστοιχα οι ποσότητες  $Q_1 = 27, Q_2 = 36, Q_3 = 4$ .



2. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο πίνακας  $X$  είναι αντιστρέψιμος

### ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli. Η λύση της που προκύπτει είναι

$\Pi(t) = \sqrt{t^{2/3} \left( 3 + \frac{t^{4/3}}{2} \right)}$ . Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι

Riccati με  $\Pi(t) = t \frac{ct + e^t}{ct - e^t}$  με  $c = 0$ .