



**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ**  
**ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010**

**ΘΕΜΑ 1 (2 Μονάδες)**

Μια βιομηχανική μονάδα κατασκευάζει τρεις διαφορετικές μηχανές Α,Β,Γ σε ποσότητες  $Q_A, Q_B, Q_C$  με αντίστοιχα κόστη  $TC_A, TC_B, TC_C$ . Η σχέση κόστους και ποσοτήτων δίνεται απο τον παρακάτω πίνακα ( $\lambda \in R$ ). Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του  $\lambda$  το σύστημα έχει λύση ικανοποιώντας τιν συνθήκες κόστους-παραγωγής ποσοτήτων.

	A	B	Γ	Συνολικό κόστος Κατασκευής
$Q_A$	1	2	3	-2
$Q_B$	1	3	2	-1
$Q_C$	1	3	$\lambda+3$	2

**ΘΕΜΑ 2 (3 Μονάδες)**

A. Μια επιχείρηση που παράγει μηνιαίως χαλκό σε δύο ξεχωριστές εκμεταλλεύσεις έχει αντίστοιχες συναρτήσεις κόστους  $TC_1 = 20q_1^3 - 24q_1 + 5, TC_2 = 27q_2^2 + 10$  με τιμή του αγαθού δοσμένη και ίση με 216 ευρώ. Να υπολογίσετε το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος της επιχείρησης καθώς και τα επίπεδα παραγωγής από κάθε εκμετάλλευση.

B. Η συνάρτηση παραγωγής υποδημάτων μιας βιοτεχνίας δίνεται ως εξής:  $Q(K, L) = e^{KL}$  όπου L οι μονάδες εργατών και K το κεφάλαιο. Να μεγιστοποιηθεί η παραπάνω συνάρτηση παραγωγής υπό τον περιορισμό  $K, L$  όταν  $3K + 2L + 6 = 0$  (Να μην χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες δεύτερης τάξης).



**ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)**

Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1.  $3xy' - y - x^2y^{-1} = 0$  ,

2.  $y'(1-x^3) = -2x + y^2 - x^2y$  με μερική λύση  $y_1 = ax^2, a \in R$

**ΘΕΜΑ 4 (2 Μονάδες)**

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας  $U(x, y) = x^2 + 2y + 5xy$  όπου ισχύει  $y = 3x$ . Ποιο το

διαφορικό πρώτης τάξης; Ποιες οι ολικές παράγωγοι  $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}$ ;

*ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ*



## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

## ΘΕΜΑ 1

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε ότι:

$$Q_A + Q_B + 3Q_\Gamma = -2$$

$$Q_A + 3Q_B + 2Q_\Gamma = -1 \quad . \text{Ο επαυξημένος πίνακας}$$

$$Q_A + 3Q_B + (\lambda + 3)Q_\Gamma = 2$$

$$(A/b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & (\lambda+3) & 2 \end{array} \right) = \dots = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & \end{array} \right) . \text{εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις με}$$

βάση την εξίσωση  $\lambda + 1 = 0$  :

1. Εάν  $\lambda = -1$  τότε το σύστημα μας είναι αδύνατο.
2. Για  $\lambda \neq -1$  ο τελευταίος επαυξημένος πίνακας γράφεται ως εξής:

$$(A/b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 3 \end{array} \right) \text{ και αντιστοιχεί στο σύστημα με λύσεις}$$

$$Q_A = \frac{-4\lambda - 19}{\lambda + 1}, Q_B = \frac{\lambda + 4}{\lambda + 1}, Q_\Gamma = \frac{3}{\lambda + 1} \quad \lambda \in R.$$

## ΘΕΜΑ 2

**A.** Η συνάρτηση κέρδους που θα πρέπει να σχηματιστεί είναι η κάτωθι:

$$\Pi = TR - TC = PQ_1 + PQ_2 - TC_{q_1} - TC_{q_2} = \dots = 240Q_1 + 216Q_2 - 20Q_1^3 - 27Q_2^2 - 15$$

Θέτοντας τις πρώτες παραγώγους ίσες με το μηδέν θα έχουμε ότι :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = 240 - 60Q_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = 216 - 54Q_2 = 0$$



Λύνοντας τις δύο εξισώσεις έχουμε ότι όταν παράγονται  $Q_1 = 2$  μονάδες από την πρώτη εκμετάλλευση ης μονάδας χαλκού και  $Q_2 = 4$  μονάδες από την δεύτερη εκμετάλλευση τότε το κέρδος γίνεται μέγιστο και ίσο με 737 χιλ. ευρώ. Υπολογίζοντας την εσσιανή ορίζουσα

$$H = \begin{vmatrix} -120Q_1 & 0 \\ 0 & -54 \end{vmatrix}$$

και τις υποορίζουσες

$$H_1 = |-120Q_1| < 0, H_2 > 0$$

Έχουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες δεύτερης τάξης. Προφανώς η συνολική παραγωγή είναι 6 μονάδες.

**B.** Η συνάρτηση Lagrange είναι η εξής  $L(K, L, \lambda) = e^{KL} + \lambda(3K + 2L + 6)$

Ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία έχουμε ότι  $K = -1, L = -1.5$

*Προφανώς η παραπάνω συνάρτηση παραγωγής υποδημάτων δεν μπορεί να λειτουργήσει με βάση τον περιορισμό που έχει δοθεί και δεν ισχύει στην περίπτωση μας που αφορά μια επιχείρηση. Η λύση που παίρνουμε υφίσταται μόνο ως μαθηματική λύση.*

### ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli. Η λύση της που προκύπτει ακολουθώντας την

γνωστή διαδικασία δίνεται ως εξής  $y(x) = \sqrt{x^{2/3} \left( c + x^{4/3} / 2 \right)}$ . Η δεύτερη διαφορική εξίσωση

είναι Riccati με λύση είναι  $y(x) = -x^2 + \frac{x^3 - 1}{c + x}$ .

### ΘΕΜΑ 4

Το διαφορικό πρώτης τάξης δίνεται ως εξής:

$$dU = (2x + 5y)dx + (2 + 5y)dy \text{ Διαιρώντας το διαφορικό με τα αντίστοιχα } dx, dy$$

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ**

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ



**UNIVERSITY OF PATRAS**

DEPARTMENT OF ECONOMICS  
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

---

υπολογίζουμε το άλλο ερώτημα.