



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2011-ΟΜΑΔΑ Α

ΘΕΜΑ 1 (3 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση προσφέρει στους καταναλωτές τις τρία διαφορετικά προϊόντα A, B, Γ σε τιμές P_A, P_B, P_Γ . Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων Q_A, Q_B, Q_Γ σε κάθε ένα από τα προϊόντα A,B,Γ ώστε να ικανοποιεί τις ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα για τις διαφορετικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2).

	A	B	Γ	Ανάγκες σε Ζήτηση Προϊόντων
P_A	1	1	1	1
P_B	λ	λ	1	$\lambda+1$
P_Γ	λ	2	2	2

1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ εκφράζει τις εισροές-εκροές μιας επιχείρησης που παράγει δύο διαφορετικά αγαθά. Ποια η τιμή του πίνακα A^{2000} (Μονάδα 1);

ΘΕΜΑ 2 (4 Μονάδες)

1. Μια επιχείρηση που ανήκει στον κλάδο των τροφίμων-ποτών παράγει δύο διαφορετικά προϊόντα A,B με τιμές 150 και 400 euro αντίστοιχα. Εάν η συνάρτηση συνολικού κόστους για τα προϊόντα A,B δίνεται ως εξής $TC(Q_A, Q_B) = 2Q_A^2 + 3Q_A Q_B + 5Q_B^2 + 150$ να υπολογίσετε τις ποσότητες που μεγιστοποιούν το κέρδος της επιχείρησης εάν θεωρήσουμε ότι λειτουργεί σε ανταγωνιστική αγορά. (2 Μονάδες).



2. Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται ως εξής: $Q(K, L) = K^3 + 2L^2$ όπου L οι μονάδες εργατών και K το κεφάλαιο. Εάν ισχύει ότι $K(t) = 2t^2 + 1, L(t) = t^2$ να βρεθεί η $\frac{dQ}{dt}$; Τι εκφράζει (1 Μονάδα);

3. Έστω η παρακάτω συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης που ανήκει στον κλάδο παραγωγής φαρμάκων $Q(K, L, E) = 10K + 50L + 40E - 0.4K^2 - 0.35L^2 - 0.15E^2$ όπου K το κεφάλαιο, L ο αριθμός εργαζομένων και E η ενέργεια που η επιχείρηση καταναλώνει. Να βρεθούν οι συναρτήσεις οριακής παραγωγής κάθε εισροής καθώς και οι αποδόσεις στην κλίμακα (1 Μονάδα).

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Μια εταιρεία διαχείρισης κεφαλαίων εξετάζει την αγορά ομολόγων από δύο διαφορετικά ασφαλιστικά ταμεία Α, Β. Η απόδοση των ομολόγων δίνεται με βάση τον χρόνο σύμφωνα με τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

1. Ταμείο Α: $2tyy' + t^2 - y^2 + 1 = 0$ όταν ικανοποιείται η συνθήκη $y(1) = 5$

2. Ταμείο Β $(1-t^3)y' = y^2 - t^2y - 2t$ με μερική λύση $y_1 = at^2, a \in \mathbb{R}, y(0) = -1$

Ποια θεωρείται ότι θα πρέπει να είναι η επιλογή της εταιρείας εάν θεωρήσει ότι ο χρόνος λήξης απόδοσης των ομολόγων είναι τα 10 έτη;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ & ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. Σχηματίζουμε το σύστημα με βάση ότι q_1, q_2, q_3 οι ζητούμενες ποσότητες.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1$$

$$\lambda Q_1 + \lambda Q_2 + Q_3 = \lambda + 1. \text{ Η ορίζουσα } D = \dots = -(\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

$$\lambda Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3 = 2$$

Εάν $\lambda=2$

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \lambda + 1 \\ \lambda & 2 & 2 & 2 \end{array} \right) = \dots = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ με λύσεις της μορφής:}$$

$$(Q_1, Q_2, Q_3) = (2 - \kappa, \kappa, -1)\kappa \in R.$$

Εάν $\lambda=1$ τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Εάν $\lambda \neq 1, 2$ έχουμε λύσεις της μορφής:

$$Q_1 = 0, Q_2 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, Q_3 = \frac{1}{1 - \lambda}$$

2. Επειδή $A^2 = 9I \Rightarrow A^{2000} = 9^{1000}I$.

ΘΕΜΑ 2

1. Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι το εξής:

$$\Pi = TR - TC = P_A Q_A + P_B Q_B - TC = \dots = 150Q_A + 400Q_B - 2Q_A^2 - 3Q_A Q_B - 5Q_B^2 - 50. \text{ Εάν πάρουμε}$$

τώρα τις μερικές παραγώγους θα έχουμε ότι $Q_A = 9.6, Q_B = 37.1$. Ελέγχοντας την συνθήκη ύπαρξης

μεγίστου έχουμε ότι $\Delta = 31 > 0$.



2. Το ζητούμενο διαφορικό υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 12t(2t^2 + 1)^2 + 8t^3$$

3. Το συγκεκριμένο θέμα απαιτεί την χρήση απλών μερικών παραγώγων.

ΘΕΜΑ 3

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι Bernoulli. Η λύση της που προκύπτει είναι

$$y(t) = \sqrt{ct - t^2 + 1}. \text{ Εάν τώρα λάβουμε υπόψη την συνθήκη } y(1) = 5 \text{ έχουμε ότι } c = 25.$$

Αντίστοιχα η λύση της δεύτερης διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι Riccati είναι

$$y(t) = -\frac{ct^2 + 1}{c + t}.$$