ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 1 (10 Μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης ως εξής: $Q = K^{1/5}L^{4/5}$.

1. Να υπολογίσετε τα οριακά προϊόντα εργασίας και κεφαλαίου (*0.5 Μονάδες*).
2. Να δείξετε ότι εάν το κόστος ανά μονάδα των δύο συντελεστών παραγωγής ορίζεται στο επίπεδο των αντίστοιχων οριακών προϊόντων τους οι μισθοί είναι τέσσερις φορές το κόστος του κεφαλαίου (*0.5 Μονάδες*).
3. Εάν η επιχείρηση αλλάξει την συνάρτηση παραγωγής σε $Q(K,L) = KL - 3L^2 - 2K^2 + 6L + 14K$ σε ποιες μονάδες παραγωγής κεφαλαίου και εργασία μεγιστοποιεί την παραγωγή της; (1.5 *Μονάδες*).
4. Εάν η επιχείρηση παράγει σε μια ανταγωνιστική αγορά και πουλάει το προϊόν της 2500 ευρώ ανά μονάδα ενώ πληρώνει 700 και 1400 ευρώ αντίστοιχα για κάθε μονάδα εργασίας και κεφαλαίου σε ποιο επίπεδο εργασίας και κεφαλαίου μεγιστοποιεί τα κέρδη της και ποια είναι αυτά; (*1.5 Μονάδες*).
5. Με βάση το γεγονός ότι η επιχείρηση υαλικών παράγει τρία διαφορετικά προϊόντα με αντίστοιχες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς,

$$Q_{D1} = 45 - 2P_1 + 3P_2 - 7P_3, Q_{S1} = -5 + 4P_1$$
$$Q_{D2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 3P_3, Q_{S1} = -19 + 5P_2$$
$$Q_{D3} = 30 - P_1 + 2P_2 - 8P_3, Q_{S1} = -6 + 2P_3$$

να υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές και ποσότητες ισορροπίας για κάθε προϊόν (*1.5 Μονάδες*).

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

6. Εάν το επίπεδο εισροών ως προς το κεφάλαιο δίνεται ως

$$A(K)=\begin{bmatrix} 1+K^2/2 & -K^2/2 & K \\ K^2/2 & 1-K^2/2 & K \\ K & -K & 1 \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι $A(K)A(L)=A(K+L)$ και να υπολογίσετε τα $A^{-1}(K),\left(A(K)-I\right)^3$ (1.5 *Μονάδες*). (A(L) το αντίστοιχο επίπεδο εισροών ως προς την εργασία)

7. Εάν θεωρήσουμε ότι η επιχείρηση έχει συνάρτηση παραγωγής $Q(K,L)=KL-3L^2-2K^2+6L+14K=0$ ποιο το επίπεδο παραγωγής στο σημείο $(K,L)=(100,200)$ (*1 Μονάδα*)

8. Η επιχείρηση υαλικών εξαγοράσθηκε από μια μεγάλη πολυεθνική επιχείρηση και προσανατολίστηκε στην παράγωγή και διάθεση ενός μόνου προϊόντος με τις ακόλουθες συναρτήσεις ζήτησης και προσφοράς.

$Q_D=40-2P-2P^{'}-P^{''},Q_S=-5+3P$

Ποια η νέα τιμή ισορροπίας γνωρίζοντας ότι $P(0)=12,P^{'}(0)=1$; (*2 Μονάδες*)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

1. $MP_K = \dfrac{Q}{5K}, MP_L L = \dfrac{4Q}{5L}$

2. $MP_K K = \dfrac{Q}{5}, MP_L L = \dfrac{4Q}{5}$. Άρα η σχέση αποδεικνύεται αρκετά εύκολα.

3. Η συνάρτηση μεγιστοποιείται για $L = 1.652, K = 3.913$ με

   $$\frac{d^2Q}{dL^2} = -6 < 0, \frac{d^2Q}{dK^2} = -4 < 0, \frac{d^2Q}{dLdK} = 4 > 0, \left(\frac{d^2Q}{dLdK}\right)^2 < \frac{d^2Q}{dK^2}\frac{d^2Q}{dL^2}$$

4. Χρησιμοποιούμε την ίδια λογική μόνο που η συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιήσουμε είναι $\Pi = TR - TC = 10000KL - 7500L^2 - 5000K^2 + 14300L + 33600K$. Οι καινούργιες τιμές τώρα είναι $L = 1.36, K = 3.7$ προφανώς μικρότερες από πριν.

5. Το σύστημα που σχηματίζεται είναι : $\begin{aligned} -6P_1 - +3P_2 - 7P_3 &= -50 \\ 2P_1 - 6P_2 + 3P_3 &= -35 \\ -P_1 + 2P_2 - 10P_3 &= -36 \end{aligned}$ με διακρίνουσα

   $D = -259 \neq 0$. Χρησιμοποιώντας Cramer-Rao οι λύσεις που προκύπτουν είναι : $P_1 = 8, P_2 = 11, P_3 = 5$. Συνεπώς οι αντίστοιχες ποσότητες ισορροπίας $Q_1 = 27, Q_2 = 36, Q_3 = 4$.

6. Το πρώτο ερώτημα αποδεικνύεται με απλή εφαρμογή. Παρατηρούμε ότι $A(0) = I$. Συνεπώς από την ήδη υποδειχθείσα σχέση θα έχουμε ότι $A(K)A(-K) = I$ και άρα ο

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ - ΡΙΟ 26500 ΠΑΤΡΑ

UNIVERSITY OF PATRAS
DEPARTMENT OF ECONOMICS
UNIVERSITY CAMPUS-RIO 26500 PATRAS, GR

πίνακα Α είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο πίνακα

$$A^{-1}(K)=\begin{bmatrix} 1+K^2/2 & -K^2/2 & -K \\ K^2/2 & 1-K^2/2 & -K \\ -K & -K & 1 \end{bmatrix}$$

Για το τρίτο υποερώτημα $\left(A(K)-I\right)^3 = A^3(K)-3A^2(K)+3A^3(K)-I =$
$A(3K)-3A(2K)+3A(3K)-I=0$

7. Το ζητούμενο διαφορικό υπολογίζεται ως εξής:

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial X}dx+\frac{\partial Q}{\partial Y}dy=....=40$$

8. Η διαφορική εξίσωση είναι η $P''(t)+2P'(t)+5P(t)=45, P_p=45/5=9$ Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2+2r+5=0, \mu\varepsilon\ r_{1,2}=-1\pm 2i$. Άρα $P=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)+9$. Εάν χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες που δίνονται και υπολογίσουμε τα Α,Β θα έχουμε ως λύση $P=e^{-t}(3\cos 2t+2\sin 2t)+9$.