

**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ II****ΠΟΛΥΜΕΝΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ/ ΚΟΥΝΕΤΑΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010****ΘΕΜΑ 1 (2 Μονάδες)**

Να υπολογιστούν οι απαιτούμενες μονάδες ποσοτήτων q_1, q_2, q_3 σε κάθε ένα από τα προϊόντα I, II, III τα οποία προμηθεύεται ημερήσια μια επιχείρηση ώστε να ικανοποιεί τις ελάχιστες ανάγκες σε ζήτηση με βάση τον επόμενο πίνακα.

	I	II	III	Ελάχιστη Ημερήσια Ζήτηση
Τιμή Αγαθού I	0.3	0.1	0.4	1.5
Τιμή Αγαθού II	100	40	60	440
Τιμή Αγαθού III	1.6	2.2	1.4	10.6

ΘΕΜΑ 2 (2 Μονάδες)

Να μεγιστοποιηθεί η παρακάτω συνάρτηση χρησιμότητας ενός ατόμου που καταναλώνει δύο αγαθά X και Y: $U(X, Y) = 10X^{0.6}Y^{0.4}$ υπό τον περιορισμό $20X + 30Y = 600, X, Y > 0$.

ΘΕΜΑ 3 (3 Μονάδες)

Να επιλύσετε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

1. $(x + 2y)dx + ydy = 0$ 2. $xy' + y = x^3y^3$ 3. $xy' + 2y = 3x$ και να βρεθεί μερική λύση για $x = 1, y = 0$

ΘΕΜΑ 4 (3 Μονάδες)

A. Να αναπτυχθεί κατά McLaurin η συνάρτηση $f(x, y) = e^{\sin x + \sin y}$ (μέχρι $3^{ου}$ βαθμού).

B. Έστω η συνάρτηση παραγωγής $Q(K, L) = 100KL - K^3L - 3L^2$ με $K = g(t) = 0.5t^2$ και

$L = s(t) = 2t + 1$. Να υπολογιστεί το $\frac{dQ(K, L)}{dt}$.



ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Σχηματίζουμε το σύστημα με βάση ότι q_1, q_2, q_3 οι ζητούμενες ποσότητες.

$$\begin{aligned} 3q_1 + q_2 + 4q_3 &= 15 \\ 5q_1 + 2q_2 + 3q_3 &= 22 \\ 1.6q_1 + 2.2q_2 + 1.4q_3 &= 53 \end{aligned} \quad . \text{ Ο επαυξημένος πίνακας } (A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 15 \\ 5 & 2 & 3 & 22 \\ 1.6 & 2.2 & 1.4 & 53 \end{array} \right) \text{ και έπειτα από}$$

τους μετασχηματισμούς και τις κατάλληλες γραμμοπράξεις έχουμε ότι

$$(B/\hat{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 88 & 88 \end{array} \right) . \text{ Από τον τελευταίο πίνακα έχουμε ότι } r(\hat{A}/b) = r(\hat{A}) = 3 \text{ και έχει}$$

λύση με πλήθος παραμέτρων μηδέν. Άρα η λύση του είναι $q_1=3, q_2=2, q_3=1$.

ΘΕΜΑ 2

Σχηματίζουμε την συνάρτηση Langrange $L(X, Y, \lambda) = 10X^{0.6}Y^{0.4} + \lambda(20X + 30Y - 600)$ με λύσεις $X = 18, Y = 8$. Υπολογίζουμε

$$L_{XX}L_{YY} - L_{XY}^2 = -960X^{0.6}Y^{-1.6} - 2880X^{-0.4}Y^{-0.6} - 2160X^{-1.4}Y^{0.4} < 0$$

ΘΕΜΑ 3

$(x + 2y)dx + ydy = 0$ και πρόκειται για χωριζομένων μεταβλητών. Λύση της διαφορικής είναι:

$$\ln\left(\frac{y}{x} + 1\right) + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = \ln cx$$

$xy' + y = x^3y^3$ και πρόκειται για Bernoulli. Λύση της διαφορικής είναι: $y^2 = \frac{1}{cx^2 - 2x^3}$

$xy' + 2y = 3x$ και είναι γραμμική. Λύση της διαφορικής είναι: $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$



ΘΕΜΑ 4

A. Η σειρά McLaurin υπολογίζεται ως εξής:

$$f(x, y) = 1 + (x + y) + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots + \frac{1}{6}(3x^2y + 3xy^2)$$

B. $\frac{dQ(K, L)}{dt} = 100t^2 - 76t - 1.75t^2 - 0.5t - 12$