

**ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ II**  
**ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2011-2012 ΜΕΡΟΣ Β**  
**ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ**

Παρακάτω δίνονται 14 συνολικά ασκήσεις τις οποίες θα επιλύσετε με όποιον τρόπο θέλετε. Οι συγκεκριμένες ασκήσεις αντιστοιχούν σε ποσοστό 10% της συνολικής σας βαθμολογίας εάν αυτές επιλυθούν στο σύνολο τους και σωστά, και αποτελούν το δεύτερο μέρος ασκήσεων για το μάθημα των Μαθηματικών για Οικονομολόγους II. Οι ασκήσεις θα παραδοθούν μέχρι και την Δευτέρα 31/05/2010 ηλεκτρονικά στο e-mail: [Kounetas@upatras.gr](mailto:Kounetas@upatras.gr). Θα ήταν προτιμότερο να δοθούν με την μορφή word document και με την χρήση του προγράμματος math type ή Microsoft equation για την αναγραφή του μαθηματικού κομματιού.

*Οποιαδήποτε καθυστέρηση θα σημαίνει μηδενική βαθμολόγηση.*

### Άσκηση 1

Να υπολογίσετε την εσσιανή μήτρα της συνάρτησης συνολικού κόστους μιας επιχείρησης που παράγει τρία αγαθά  $x_1, x_2, x_3$   $TC = \ln(ax_1 + bx_2 + cx_3)$ .

### Άσκηση 2

Η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης δίνεται ως εξής  $Q = f(K, L) = AK^a L^{1-a}$ .

Να δείξετε ότι το οριακό προϊόν της εργασίας είναι θετικό και ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση της εργασίας όταν το κεφάλαιο παραμένει σταθερό.

### Άσκηση 3

Ποιος ο βαθμός ομοιογένειας της συνάρτησης  $y = [(1-s)x^{-b}]^{-1/b}$

**Άσκηση 4**

Ποιο το διαφορικό δεύτερης τάξης της συνάρτησης παραγωγής  $Q = f(K, L) = K^2 L^3$  με  $K(t) = 2t, L(t) = 3t^2$ .

**Άσκηση 5**

Η παραγωγή  $Q$  ενός εργοστασίου εξαρτάται από τους συντελεστές παραγωγής  $K, L$  σύμφωνα με την σχέση  $Q=f(K,L)$ . Εάν οι συντελεστές παραγωγής αυξηθούν κατά 30% ποια θα είναι η επίπτωση στην παραγωγή;. Να δείξετε ότι οι ελαστικότητες ως προς το κεφάλαιο  $K$ , και την εργασία είναι αντίθετες.

**Άσκηση 6**

Έστω η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης  $Q = KL^2$  με  $K(t) = 3t^2, L(t) = 3t + 7$   $K$ , το κεφάλαιο,  $L$  η εργασία και  $t$  ο χρόνος. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της παραγωγής στην διάρκεια του χρόνου.

**Άσκηση 7**

Μια επιχείρηση πουλάει δύο προϊόντα με συναρτήσεις ζήτησης  $Q_1 = 110 - 4P_1 - P_2$  όπου  $Q$  η ποσότητα και  $P$  η τιμή για κάθε προϊόν. Προσδιορίστε τις τιμές που μεγιστοποιούν τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης αλλά και τις αντίστοιχες ποσότητες. Ποια είναι τα μέγιστα έσοδα;

**Άσκηση 8**

Να προσεγγίσετε την συνάρτηση κερδών  $\Pi(x, y) = e^{x^2+y^2+xy} - 2xy - 2x^3 - y^3$  γύρω από το σημείο  $(4,4)$  και μέχρι δευτέρου βαθμού. Τι απάντηση θα δίνετε στο σημείο  $(0,0)$ ;

**Άσκηση 9**

Υπάρχει συναρτησιακή σχέση μεταξύ των συναρτήσεων

$$F_1(K_1, L_1) = 3K_1 + L_1^2$$

$$F_2(K_1, L_1) = 9K_1^4 + 6K_1^2(L_1 + 4) + L_1^2 + 8L_1 + 12$$

**Άσκηση 10**

Θεωρούμε μια επιχείρηση που παράγει δύο προϊόντα σε συνθήκες τέλει ανταγωνισμού με  $TC(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$ . Ποιες οι βέλτιστες ποσότητες ισορροπίας;

**Άσκηση 11**

Για το παρακάτω σύστημα ισορροπίας να υπολογίσετε τα  $\frac{\partial K_1}{\partial E_1}, \frac{\partial L_1}{\partial E_1}$ .

$$F_1(K_1, L_1, E_1, I_1) = 3K_1 + L_1^2 - E_1 - I_1^3 = 0$$

$$F_2(K_1, L_1, E_1, I_1) = K_1^3 - 2L_1 + 2E_1^3 - I_1 = 0$$

**Άσκηση 12**

Η γενική μορφή CES συνάρτησης παραγωγής είναι

$$Q = \gamma \left[ \delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho} \right]^{-\mu/\rho}, \gamma, \mu \geq 0, 0 \leq \delta \leq 1.$$

Να βρεθεί ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης εάν γνωρίζετε ότι το  $\mu$  δείχνει το βαθμό ομοιογένειας της συνάρτησης, το  $\gamma$  εκφράζει την αποδοτικότητα, το  $\delta$  είναι παράμετρος διανομής και το  $\rho$  παριστάνει την παράμετρο υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής και κεφαλαίου.

**Άσκηση 13**

Η συνάρτηση χρησιμότητας του συνδικάτου των εργατών δίνεται από την σχέση  $U = W^{3/4}L^{1/4}$  όπου  $W$  και  $L$  το επίπεδο μισθού και ο αριθμός των απασχολούμενων αντίστοιχα. Η συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης δίνεται από την εξής σχέση  $TR = 500L - 0.25L^2$ . Να βρεθεί το επίπεδο μισθών και απασχόλησης το οποίο αντιστοιχεί σε κέρδος 100 εκ ευρώ για την επιχείρηση.

**Άσκηση 14**

Δίνεται η συνάρτηση χρησιμότητας του καταναλωτή  $A$   $U = Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_1Q_3$  όπου  $Q_1, Q_2, Q_3$  οι ποσότητες από τρία διαφορετικά αγαθά. Εάν οι τιμές των αγαθών αυτών είναι 2, 4 και 6 ευρώ αντίστοιχα ενώ το εισόδημα του καταναλωτή είναι 48 ευρώ ημερησίως για ποιες ποσότητες μεγιστοποιεί την χρησιμότητά του. (Θα χρειαστεί μια απλή αναφορά στη θεωρία χρησιμότητας για την λύση της συγκεκριμένης άσκησης).