ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΑΚ. ΕΤΟΣ 2023-2024

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι-Μάθημα 7ο Αόριστο Ολοκλήρωμα (Ολοκληρωτικός Λογισμός).

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Πραγματεύεται την εύρεση της συνάρτησης όταν γνωρίζουμε την παράγωγό της. Για παράδειγμα γνωρίζουμε την συνάρτηση οριακού κόστους και αναζητούμε αυτή του συνολικού μας κόστους κ.λ.π. Ένα δεύτερο μέρος του Ολοκληρωτικού Λογισμού αφορά τον υπολογισμό χωρίων κυρίως στο επίπεδο. Αυτό δεν είναι πάντα και δυνατό (βλέπε προσεγγιστικές μεθόδους, πίνακες ολοκλήρωσης κ.λ.π)

Αντιπαράγωγος Συνάρτησης

Έστω οι συναρτήσεις F και f μιας πραγματικής μεταβλητής (x) ορισμένες στο ίδιο διάστημα. Το πρόβλημα μας αφορά την εύρεση όλων των συναρτήσεων F(x) όπου ισχύει $F^{'}(x) = f(x)$

Ορισμός:Η συνάρτηση F είναι μια αντιπαράγωγος ή μια παράγουσα συνάρτηση της f *τότε και μόνο τότε εάν* για κάθε x του πεδίου ορισμού της ισχύει $F^{'}(x) = f(x), \forall x \in A$

Η οικογένεια των αντιπαραγώγων F(x)+c ονομάζεται Αόριστο Ολοκλήρωμα. Ο όρος ολοκλήρωμα ή παράγουσα αποδίδεται και ως αρχική συνάρτηση.
Μια συνάρτηση F μπορεί να είναι ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα (α,β) *χωρίς να υπάρχει η παράγωγος* σε αυτό.
Παραδείγματα

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Εάν η συνάρτηση f έχει παράγουσες , το σύνολο των παραγουσών της λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα και συμβολίζεται $\int f(x)dx$
Ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

$$F \xrightarrow[\text{Ολοκλήρωση}]{\int f(x)dx} f \xrightarrow[\text{Διαφόριση}]{df/dx} f'$$

Αρχικές Συνθήκες

Η οικογένεια των αντιπαραγώγων F(x)+c διαφέρουν κατά την σταθερά c.Η ύπαρξη της αρχικής ή συνοριακής συνθήκης μας δίνει πρόσθετη πληροφόρηση για την σταθερά.

Παράδειγμα: $f(x) = 4x - 3$

Να παρασταθεί γραφικά το ολοκλήρωμα της.

Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης (1)

1.Ολοκλήρωμα Δύναμης για ν $\neq$ -1

$$\int \mathrm{x}^{\nu} dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$$

2.Ολοκλήρωμα Δύναμης για ν=-1

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, x \neq 0$$

3.Ολοκλήρωμα Εκθετικής Συνάρτησης

$$\int e^{x} dx = e^{x} + c, \int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$$

4.Ολοκλήρωμα Αθροίσματος Συναρτήσεων

Εάν f(x),g(x) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

5.Ολοκλήρωμα γινομένου συνάρτησης επί σταθερά

$$\int \kappa f(x) dx = \kappa \int f(x) dx$$

Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης (2)

6.Ολοκλήρωμα $\eta\mu\iota\tau\acute{o}\nu o\upsilon$

$$\int \text{ημx}dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$$

7.Ολοκλήρωμα συνημιτόνου

$$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c,$$

8.Ολοκλήρωμα Σταθερής Συνάρτησης

$$\int \alpha dx = \alpha x + c$$

9.Ολοκλήρωμα τόξου ημιτόνου

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \tau o\xi\eta\mu x + c$$

10.Ολοκλήρωμα τόξου εφαπτομένης

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tau o\xi\varepsilon\phi x + c$$

Βασικοί Κανόνες Ολοκλήρωσης (3)

11.Ολοκλήρωμα εφαπτομένης

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \varepsilon\phi x + c$$

12.Ολοκλήρωμα συνεφαπτομένης

$$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x}\,dx = -\sigma\upsilon\nu\varepsilon\phi x + c,$$

Απλές Εφαρμογές

$1.\int 5dx$

$2.\int x^2dx$

$3.\int \frac{1}{x+2}dx$

$4.\int e^{4x}dx$

$5.\int a^{x+1}dx$

$6.\int x^3+e^{4x}dx$

$7.\int 3e^{4x}dx$

$8.\int \eta\mu 3xdx$

$9.\int \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}dx$

$10.\int \sqrt{x}dx$

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Οι δύο κυρίαρχοι μέθοδοι ολοκλήρωσης σύνθετων συναρτήσεων είναι οι εξής:

1. Μέθοδος Αντικατάστασης
2. Μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Ξεχωριστή αντιμετώπιση χρήζει η περίπτωση των ρητών συναρτήσεων.

Μέθοδος Αντικατάστασης (Αλλαγή Μεταβλητής)

Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της εξής μορφής $I = \int f[g(x)]g^{'}(x)dx$
όπου προφανώς f(x) ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
Εάν θέσουμε $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g^{'}(x)$

Οπότε το ολοκλήρωμα μας θα προκύπτει ως εξής:

$$I = \int f[g(x)]g^{'}(x)dx = \int f(u)g^{'}(x)\frac{1}{g^{'}(x)}du = \int f(u)du$$

(*Ουσιαστικά μιλάμε για τον αντίστοιχο αλυσωτό κανόνα της παραγώγισης*)

Εφαρμογές-Παραδείγματα

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$1.\int (x^3+2)3x^2dx$$

$$2.\int (e^x+x)^a(e^x+1)dx$$

$$3.\int \frac{\ln x^n}{x}dx$$

$$4.\int \sqrt{x}dx$$

$$5.\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$6.\int (x+2\sqrt{x})(1+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$$

Μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η παραπάνω μέθοδος βασίζεται στην αντίστροφη εφαρμογή του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο συναρτήσεων. Έστω υ=υ(x),v=v(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Από τον κανόνα του διαφορικού (γινόμενο) ισχύει

$$d(uv) = udv + vdu \Leftrightarrow udv = d(uv) - vdu \Leftrightarrow \int udv = \int d(uv) - vdu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int udv = uv - \int vdu$$

Ο τύπος που συνήθως αναφέρεται είναι:

$$\int u(x)v'(x) = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Εφαρμογές-Παραδείγματα

- Να υπολογιστούν τα τα ολοκληρώματα

$$1.\int x^3 e^{x^2} dx$$

$$2.\int x^2 \ln x dx$$

$$3.\int \ln x dx$$

$$4.\int x^3 e^x dx$$

$$5.\int x\eta\mu x dx$$

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων (1)

Στην περίπτωση των ρητών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε την μέθοδο των μερικών κλασμάτων (partial franctions). Πρόκειται για μια αλγεβρική διαδικασία μετασχηματισμού σε απλούστερη μορφής κλάσματα.

Αν θεωρήσουμε ότι η υπό ολοκλήρωση ρητή συνάρτηση είναι της μορφής P(x)/Q(x) μπορούμε να ξεχωρίσουμε την εξής περιπτώσεις (όπου P(x) πολυώνυμο μικρότερου βαθμού του Q(x):

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων (2)

- Ο παρανομαστής έχει n διακριτές ρίζες.
- Ο παρανομαστής έχει n διακριτές ρίζες ορισμένες εξ αυτών επαναλαμβάνονται k φορές.
- Ο παρανομαστής μπορεί να γραφεί ως γινόμενο παραγόντων (μορφής δευτεροβάθμιας) που δεν έχουν πραγματικές ρίζες.

Εφαρμογές-Παραδείγματα

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$1.\int \frac{5x+2}{(x-2)(x+4)}dx$$

$$2.\int \frac{x^2+11x-4}{(x-3)(x+2)^2}dx$$

$$3.\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$4.\int \frac{4x-7}{x^2-3x+2}dx$$

$$5.\int \frac{x}{x^4+6x^2+5}dx$$

Παράδειγμα

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$$

θέτουμε $u = \sqrt{x}$, οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow dx = 2udu$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$\int \frac{2udu}{\sqrt{u+1}} = 2\int \frac{2udu}{2\sqrt{u+1}} = 4\int\left(\sqrt{u+1}\right)'udu = 4\,u\sqrt{u+1} - 4\int\left(\sqrt{u+1}\right)u'du$=

$=4u\sqrt{u+1} - 4\int\left(\sqrt{u+1}\right)du = 4u\sqrt{u+1} - 4\,\frac{(u+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$

$4u\sqrt{u+1} - \frac{8}{3}\sqrt{(u+1)^3} + c.$

Επομένως

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{3}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3} + c.$$

Παράδειγμα 1

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$$

Λύση

$$\frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{2x^2+7x-1}{x^2(x+1)-(x+1)} = \frac{2x^2+7x-1}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{2x^2+7x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{\mathrm{B}}{(x+1)^2} + \frac{\Gamma}{x-1} = \frac{\mathrm{A}(x^2-1)+\mathrm{B}(x-1)+\Gamma(x+1)^2}{(x+1)(x^2-1)}$$

Επομένως $\mathrm{A}(x^2-1)+\mathrm{B}(x-1)+\Gamma(x+1)^2 = 2x^2+7x-1$

$\mathrm{A}x^2 - A + \mathrm{B}x - \mathrm{B} + \Gamma x^2 + 2\Gamma x + \Gamma = 2x^2+7x-1$

$$x^2(\mathrm{A}+\Gamma) + x(\mathrm{B}+2\Gamma) - \mathrm{A} - \mathrm{B} + \Gamma = 2x^2+7x-1$$

Έτσι προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\Gamma = 2 \\ \mathrm{B}+2\Gamma = 7 \\ -\mathrm{A}-\mathrm{B}+\Gamma = -1 \end{cases}$$

- $\begin{cases} A + \Gamma = 2 \\ B + 2\Gamma = 7 \\ -A - B + \Gamma = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 - \Gamma & (1) \\ B = 7 - 2\Gamma & (2) \\ -A - B + \Gamma = -1 & (3) \end{cases}$
-

αντικαθιστούμε τις (1) και (2) στην (3)

$-2 + \Gamma - 7 + 2\Gamma + \Gamma = -1 \Leftrightarrow 4\Gamma = 8 \Leftrightarrow \Gamma=2$

Από την (1) Α=0 και από την (2) Β=3. Επομένως

$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}dx = \int \frac{3}{(x+1)^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = -\frac{3}{x+1} + 2ln|x-1| + c$

Παράδειγμα 2

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$$

Λύση

$$x^4+x+1 \qquad x^3-x^2+x-1$$

$$-x^4+x^3-x^2+x \qquad x+1$$

$$x^3-x^2+2x+1$$

$$-x^3+x^2-x+1$$

$$x^4+x+1=(x^3-x^2+x-1)(x+1)+x+2$$

$$x+2$$

- $\frac{x^4+x+1}{x^3-x^2+x-1} = \mathrm{x} + 1 + \frac{x+2}{x^3-x^2+x-1}$
- Αναλύουμε το $\frac{x+2}{x^3-x^2+x-1}$ σε απλά κλάσματα

$$\frac{x+2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1} = \frac{\mathrm{A}\left(x^2+1\right)+(Bx+\Gamma)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Επομένως

$\mathrm{A}(x^2+1) + (Bx+\Gamma)(x-1) = x + 2 \Leftrightarrow (\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2 + (-\mathrm{B} + \Gamma)\mathrm{x} + \mathrm{A} - \Gamma = \mathrm{x} + 2$

$$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ -\mathrm{B} + \Gamma = 1 \\ \mathrm{A} - \Gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = -B & (1) \\ \Gamma = \mathrm{B} + 1 & (2) \\ \mathrm{A} - \Gamma = 2 & (3) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τις (1) και (2) στην (3) και έχουμε

$$\frac{x+2}{x^3-x^2+x-1}=\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

Το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{x^4+x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx=\int(\mathrm{x}+1+\frac{x+2}{x^3-x^2+x-1})\,dx$$

$$=\int(\mathrm{x}+1)\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{3}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\;+x+\frac{3}{2}ln|x-1|-\frac{3}{4}\;\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi x+c$$

Εφαρμογή :Από την οριακή στην συνολική συνάρτηση

- Αν το οριακό κόστος μιας επιχείρησης είναι η συνάρτηση $C'(Q) = 2e^{0.2Q}$ και το σταθερό κόστος (αρχικό) είναι $C_0 = 90$, να βρεθεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους $C(Q)$.

Λύση

Ολοκληρώνουμε την συνάρτηση $C'(Q)$ ως προς Q:

$$\int 2e^{0.2Q}dQ = 2\frac{1}{0.2}e^{0.2Q}+c$$

$$C(Q)= 2\frac{1}{0.2}\ e^{0.2Q}+c$$

Για Q=0 είναι

$$C(0)= 2\frac{1}{0.2}\ e^{0}+c$$

90=10+c

C=80

Επομένως $$C(Q)= 2\frac{1}{0.2}\ e^{0.2Q}+80$$

Εφαρμογές-Παραδείγματα στα Οικονομικά

- Πλεόνασμα Καταναλωτή
- Πλεόνασμα Παραγωγού
- Καμπύλη Lorentz
- Παρούσα Αξία Χρηματοροής
- Μελλοντική Αξία Χρηματοροής
- Καμπύλη Μάθησης

Ασκήσεις στα Οικονομικά

Να υπολογιστούν η συνάρτηση ζήτησης και η συνάρτηση συνολικών εσόδων όταν είναι γνωστό ότι

$$MR = 84 - 4Q - Q^2$$

Ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος είναι 220(t-10) ευρώ τον χρόνο. Εάν το μηχάνημα αγοραστεί καινούργιο στην τιμή των 120 χιλιάδων ευρώ ποια η αξία του σε 10 χρόνια;

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

- Η μαθηματική ελπίδα μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητα f(x) δίνεται ως εξής:

$$E(x) = \int \mathrm{xf(x)dx}$$

- Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής δίνεται ως:

$$Var(x) = \int \left(x - E(x)\right)^2 \mathrm{f(x)dx}$$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων με την Εκθετική Κατανομή

- Ο υπολογισμός πιθανοτήτων γίνεται με βάση τη συνάρτηση κατανομής:

$$F(x_0) = P(X \le x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx = 1 - e^{-\lambda x_0} \qquad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \\ 0 \quad , \end{cases}$$

- Παράδειγμα: Ο χρόνος που χρειάζεται για να γεμίσει ένα φορτηγό σε μία αποθήκη ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο μ=15 λεπτά.
  - (α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαίο φορτηγό να γεμίσει σε χρόνο λιγότερο από 6 λεπτά;
  - (β) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαίο φορτηγό να γεμίσει σε χρόνο λιγότερο από 18 λεπτά;

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή (Standard Normal Distribution)

- Η τυποποιημένη (ή τυπική) κανονική κατανομή είναι η κανονική κατανομή που έχει μέσο 0 και διακύμανση 1, δηλαδή $\mu=0$ και $\sigma^2=1$
- Συμβολικά γράφουμε $Z \sim N(0,1)$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},\quad -\infty<z<+\infty$$

- Για την τυποποιημένη κανονική κατανομή υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν τη συνάρτηση κατανομής για κάθε τιμή z_0 της Z

$$\Phi(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0} f(z)dz=P(Z\le z_0)$$

Γάμα & Βήτα Κατανομές

- Η Γάμα και η Βήτα κατανομή έχουν συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{a}\sqrt{a}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x>0 \\ 0, x\leq 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{a}\sqrt{a}} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, 0<x<1 \\ 0, x\leq 0 \text{ ή } x\geq 1 \end{cases}$$

- Να δείξετε ότι

$$E(X) = \alpha\beta, Var(X) = \alpha\beta^{2}$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^{2}(\alpha+\beta+1)}$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- Σημειώσεις και τις αντίστοιχες ασκήσεις από το e-class
- Το κεφάλαιο 6 από το βιβλίο του Jacques, το κεφάλαιο 18 απο το βιβλίο του Renshaw.
- Επίσης, το κεφάλαιο 10 του ολοκληρωτικού από το βιβλίο του Ξεπαπαδέα ή το κεφάλαιο 17ο απο τον Λουκάκη.