# ΜΑΘΗΜΑ ΤΡΙΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
# ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ)

## **Α.** *Παραγώγιση Συναρτήσεων (κανόνες)*

**Παράδειγμα 1**

Δίνεται η συνάρτηση h, $h(x) = x^2 \eta\mu x$ Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραγωγίσεως

γινομένου $h'(x) == (x^2)' \eta\mu x + x^2 (\eta\mu x)' = 2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x$

**Παράδειγμα 2**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\phi x$

Λύση

Με βάση τον κανόνα πηλίκου θα έχουμε ότι

$$f'(x) = (\varepsilon\phi x)' = (\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x})' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

**Παράδειγμα 3**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2 e^x \log x$

Λύση

Με βάση τους παραπάνω κανόνες παραγώγισης θα έχουμε ότι η παράγωγος θα δίνεται:

$$f'(x) = (x^2 e^x)' \log x + (x^2 e^x)(\log x)' = [(x^2)' e^x + x^2 (e^x)'] \log x + (x^2 e^x)(\log x)' =$$
$$= ...... = 2xe^x \log x + x^2 e^x \log x + xe^x$$

## **Β.** *Παραγώγιση Σύνθετων Συναρτήσεων (κανόνες)*

Ο βασικός τύπος που αναφέρεται στην παραγώγιση δύο συναρτήσεων δίνεται ως εξής: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.

**Παράδειγμα 1**

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\log(x^2+1)$.

Λύση

Με βάση τον παραπάνω τύπο θα έχουμε ότι η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης δίνεται ως εξής:

$$f^{'}(x)=[\log(x^2+1)]^{'}=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)^{'}=\frac{2x}{x^2+1}$$

**Παράδειγμα 2**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+1)^{3x}$ Να βρεθεί η παράγωγός της.

Λύση

$$\log f(x)=\log[(x^2+1)^{3x}]\Leftrightarrow \log f(x)=3x\log[(x^2+1)]\Leftrightarrow$$

$$f(x)=e^{3x\log[(x^2+1)]}\Leftrightarrow f^{'}(x)=[e^{3x\log[(x^2+1)]}]^{'}=e^{3x\log[(x^2+1)]}[3x\log[(x^2+1)]^{'}=$$

$$=(x^2+1)^{3x}(3\log(x^2+1)+\frac{6x^2}{x^2+1})$$

**Παράδειγμα 3 (αντίστροφη συνάρτηση)**

Η συνάρτηση $f(x)=\cos x$ στο (0,π) είναι γνησία φθίνουσα και η αντίστροφή της $y=\cos x$ έχει τύπο $f^{-1}(x)=acr\tan\cos x=\tau o\xi\sigma\upsilon\nu y$ τότε:

Λύση

$$[f^{-1}(y)]^{'}=\frac{1}{f^{'}(x)}=\frac{1}{(\cos x)^{'}}=\frac{1}{(-\sin x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},-1<y<1.$$ Άρα θα

έχουμε ότι $$\begin{array}{l}(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu y)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},-1<y<1, \acute{\eta} \\ (\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},-1<x<1\end{array}.$$

*Ομοίως για την* $f(x)=\sin x, x\in(-\pi/2,\pi/2)$

**Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας)**

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραγώγους:

$$f(x) = \eta\mu^2 x + 1$$

$$f(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{x} + \frac{x}{\eta\mu x}$$

$$f(x) = x^3 \log x - x^2/3$$

$$f(x) = 2^x (x-1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x}$$

$$f(x) = e^x \cos x$$

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{(1+x)^2}\right)^3$$

$$f(x) = \eta\mu(\eta\mu x)$$

$$f(x) = (1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = 5^{\eta\mu x}$$

$$f(x) = (\log x)^x$$

$$f(x) = \sin^2 x \cos 2x$$

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

Με βάση τον ορισμό (εάν είναι παραγωγίσιμη δηλαδή)

$$f(x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$$

$$f(x) = 5x + 2\sqrt{x-3} + 1$$

$$f(x) = 3x + 5\left|x-2\right| + 1$$

## **C.** *Παραγωγισιμότητα και Συνέχεια Συναρτήσεων*

**Παράδειγμα 1**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta x, x\geq 3 \\ 2\alpha x+\beta+5, x<3 \end{cases}$.

Να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

<u>Λύση</u>

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της θα πρέπει πρώτα να δούμε συγκεκριμένα το σημείο όπου x=3. Όμως πρώτα θα πρέπει να εξετάσουμε και την συνέχεια της συνάρτησης αφού θα πρέπει να είναι συνεχής. Άρα:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}(2ax+\beta+5)=\lim_{x\to 3^+}(ax^2+\beta x) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 6a+\beta+5=9a+3\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a+2\beta=5$$

Για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτησή μας θα πρέπει να ισχύει:

$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} \Leftrightarrow ....... \Leftrightarrow 4a+\beta=0$. Εάν τώρα λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων θα έχουμε ότι α=-1,β=4.

**Παράδειγμα 2**

Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια-παραγωγισιμότητα την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-ax+2}{x-3}, x\leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, 1<x \end{cases}$$

## **D.** *Κανόνας de L'Hospital*

Με βάση τον κανόνα του *de L'Hospital* βγαίνει το συμπέρασμα ότι αν μάθουμε τρόπο για να υπολογίζουμε τα όρια των απροσδιορίστων μορφών $\frac{0}{0},\frac{+\infty}{+\infty}$ τότε θα μπορούμε να υπολογίζουμε το όριο κάθε απροσδιόριστης μορφής. Προσοχή

- *Θα πρέπει να υπάρχει το όριο (πεπερασμένο ή άπειρο)* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
- *Δεν αρκεί να παραγωγίζονται μόνο στο* $x_0$ *είναι απαραίτητο να παραγωγίζονται σε περιοχή του* $x_0$ *χωρίς ενδεχομένως στο* $x_0$ .
- *Μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες φορές.*
- *Η σχέση* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ *δεν είναι ισότητα με την γενική έννοια.*

**Παράδειγμα 1**

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \log x^2$

<u>Λύση</u>

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0} \log x^2 = -\infty$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή οπότε με κατάλληλο μετασχηματισμό θα προσπαθήσουμε να την φέρουμε στις δύο γνωστές μορφές $\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}$ .Έτσι, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \log x^2 = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\log x^2}{1/x^2} = -\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Εξετάζουμε λοιπόν τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x), \lim\limits_{x \to 0} g(x)$. Θα δούμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ αρα απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$ με

$, f^{'}(x) = (-\log x^2)^{'} = ... = -2/x, g^{'}(x) = (1/x^2)^{'} = ... = -2/x^3$ Οπότε θα έχουμε,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2/x}{-2/x^3} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

**Παράδειγμα 2 (Μόνοι σας!!!!)**

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^x$

**Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας!!!!)**

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$