

**ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ
ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ-ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ-
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ)**

A. Κανόνας de L'Hospital (Συνέχεια από το προηγούμενο μάθημα)

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί το όριο της $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{x}{e^x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{x}{e^x}$

Λύση

Είναι φανερό ότι υπάρχει απροσδιοριστία της μορφής άπειρο προς άπειρο.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα του de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (x)'}{\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x)'} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x)} = 0$$

Παράδειγμα 2.(μόνοι σας)

Να βρεθεί το όριο των $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-x} \ln x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (9x^2 - 5x^3)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x^{1/x}$

Παράδειγμα 3.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση σταθερών ελαστικότητας υποκατάστασης (CES)

$Q = A[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}]$, $A > 0$, $0 < a < 1$. Να δειχτεί ότι όταν το ρ τείνει στο άπειρο η παραπάνω συνάρτηση CES έχει ως όριο την συνάρτηση Cobb-Douglas.

Παράδειγμα 4.(Μόνοι σας)

Να βρεθεί τα όρια των $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \ln x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = xe^{-2x}$

B. Εύρεση Διαφορικού-Κανόνας Αλυσίδας (chain rule)**Παράδειγμα 1.**

Να υπολογιστεί το διαφορικό της $f(x) = x^5$

Λύση

$$dy = \frac{d}{dx}(x^5)dx = 5x^4 dx$$

Παράδειγμα 2.

Να βρεθεί το διαφορικό πρώτης και δεύτερης τάξης της εξίσωσης του εισοδηματικού περιορισμού (budget constraint) $Y = P_a A + P_b B$.

Λύση

$$dA = \left(\frac{Y - P_b B}{P_a} \right)' dB = \frac{-P_b}{P_a} dB$$

$$d^2 A = \left(\frac{-P_b}{P_a} dB \right)' dB = 0$$

Παράδειγμα 3.

Έστω το ακόλουθο υπόδειγμα προσδιορισμού εισοδήματος μιας οικονομίας

(κλειστής). $Y = C + I, C = f(Y), N = h(Y)$ όπου Y το εισόδημα, C η κατανάλωση και

N η απασχόληση. Να υπολογιστούν το διαφορικό dY σε όρους dI και το διαφορικό dN σε όρους dI .

C. Μελέτη Συναρτήσεων

Παράδειγμα 1.

Να μελετηθεί η ακόλουθη συνάρτηση $f(x) = x + 5 + \frac{4}{x+1}$.

Λύση

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $R - \{-1\}$.
- Εξετάζουμε εάν είναι άρτια ή περιττή.

$$f(-x) = (-x) + 5 + \frac{4}{(-x)+1} = -x + 5 + \frac{4}{-x+1} \neq -f(x). \text{ Άρα δεν είναι άρτια ή περιττή.}$$

- Για να υπολογίσουμε μία ρίζα της παραπάνω συνάρτησης

$$f(x) = x + 5 + \frac{4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -3$$

- Εξετάζουμε τώρα την συνέχεια της συγκεκριμένης συνάρτησης. Επειδή η συνάρτηση μας είναι πολυωνυμική θα εξετάσουμε την συνέχεια στο σημείο -1.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μας είναι ασυνεχής στο συγκεκριμένο σημείο.

- Τώρα υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης. Θα έχουμε ότι

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \text{ οπότε οι ρίζες της παραπάνω}$$

παραγώγου είναι $x_1 = -3, x_2 = 1$. Θα προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου.

| | | | |
|---------|----|---|---|
| x | -3 | 1 | |
| $f'(x)$ | + | - | + |

- Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της συγκεκριμένης συνάρτησης.

$f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$. Προφανώς δεν υπάρχουν ρίζες για την δεύτερη παράγωγο.

| | | |
|----------|----|---|
| x | -1 | |
| $f''(x)$ | - | + |

- Εξέταση Ασύμπτωτων


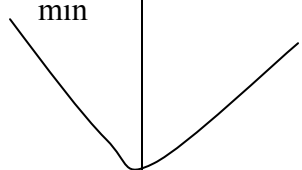
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x(x+1)}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x + 5 + \frac{4}{x+1}\right) - 1x \right] = 5$$

Άρα $y = ax + \beta \Leftrightarrow y = x + 5$, πλάγια ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, x = -1$ ασύμπτωτη

- Από τα παραπάνω κατασκευάζουμε τον ακόλουθο πίνακα

| | | | | |
|----------|--|----|--|---|
| x | -3 | -1 | 1 | |
| $f'(x)$ | + | - | - | + |
| $f''(x)$ | - | - | + | + |
| $f(x)$ |  max | |  min | |

Παράδειγμα 2.

Να μελετηθεί η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

Λύση

- Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(0, +\infty)$.
- Εξετάζουμε εάν είναι άρτια ή περιττή και προφανώς δεν είναι.
- Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης δεν τέμνει τον άξονα yy' αφού το x είναι διάφορο του μηδενός τέμνει όμως τον xx' στο σημείο $(1,0)$ (δείτε λίγο την $\ln x$).
- Εξετάζουμε τώρα την συνέχεια της συγκεκριμένης συνάρτησης. Προφανώς και είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
- Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln^2 x = (+\infty)(+\infty) = (+\infty)$. Άρα

η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια Ασύμπτωτη: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. Έχουμε

ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$ Άρα η $y=0$

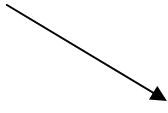
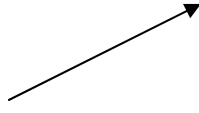
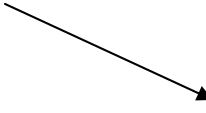
είναι οριζόντια ασύμπτωτη. Προφανώς για την συγκεκριμένη συνάρτηση απλά δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

- Ομοίως θα είναι και παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(\ln^2 x)' x - (x)' \ln^2 x}{x^2} = \dots = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2}$$

Για την εύρεση της μονοτονίας θα

$$\text{πρέπει } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - \ln x) \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = e^2.$$

| | | | |
|---------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | e^2 |
| $f'(x)$ | - | + | - |
| $f(x)$ |  |  |  |

Το σημείο 1 είναι τοπικό ελάχιστο ενώ το σημείο e^2 είναι τοπικό μέγιστο.

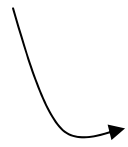
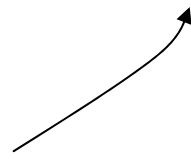
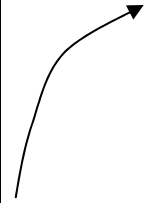
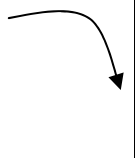
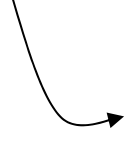
- Σειρά τώρα έχει ο υπολογισμός των σημείων καμπής και της κυρτότητας. Άρα θα πρέπει να υπολογίσω την δεύτερη παράγωγο.

$$f''(x) = \left(\frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2} \right)' = \dots = \frac{(\ln^2 x - 3 \ln x + 1)}{x^3}. \text{ Προφανώς πάλι θα πρέπει να}$$

εξετάσουμε που η δεύτερη παράγωγος ισούται με το μηδέν.

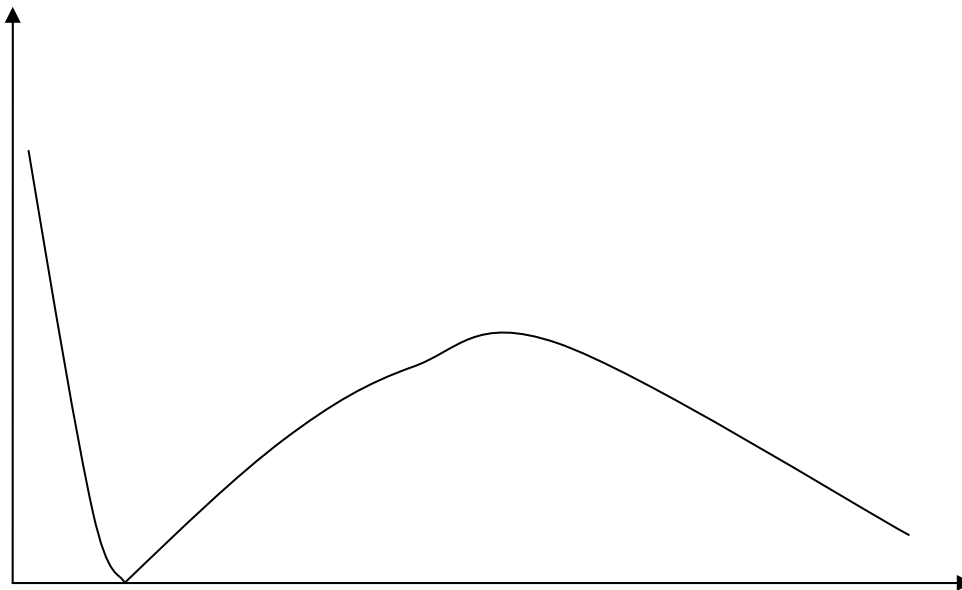
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(\ln^2 x - 3 \ln x + 1)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \wedge x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}. \text{ Ομοίως κατασκευάζουμε}$$

τον παρακάτω πίνακα.

| | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | $e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ | e^2 | $e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ |
| $f'(x)$ | - | + | + | - | - |
| $f''(x)$ | + | + | - | - | + |
| $f(x)$ |  |  |  |  |  |

Τα σημεία $x = e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \wedge x = e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ αποτελούν σημεία

καμπής.



Παράδειγμα 3.

Να μελετηθεί οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)|x-1|}{|x|}$$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ \ln \frac{e^x - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$$

*D. Εφαρμογές Στα Οικονομικά***Παράδειγμα 1. Ελαστικότητα**

Η συνάρτηση ζήτησης για ένα αγαθό είναι $q = 20 - 4p$. Να υπολογιστούν:

1. Η ελαστικότητα ζήτησης,
2. Η ελαστικότητα ζήτησης όταν $p=4$
3. Για ποια τιμή η ελαστικότητα ζήτησης γίνεται μοναδιαία

Λύση

1. Η ελαστικότητα ζήτησης δίνεται $\varepsilon = \frac{dp}{dq} \frac{p}{q} = \frac{d(20-4p)}{dq} \frac{p}{q} = 4 \frac{p}{20-4p} = \frac{p}{5-p}$
2. Για $p=4$ από παραπάνω έχουμε ότι $\varepsilon=4$
3. Για $\varepsilon=1$ θα έχουμε ότι $p=2.5$

Παράδειγμα 2. Συναρτήσεις Παραγωγής

Έστω η συνάρτηση $TP = -3L^3 + 270L^2 + 60L$. Για ποια τιμή του L μεγιστοποιείται το παραγόμενο προϊόν. Πότε μεγιστοποιείται το μέσο προϊόν;

Παράδειγμα 3. Οριακά Έσοδα

Έστω η συνάρτηση ζήτησης για ένα προϊόν μιας βιομηχανίας $p = \frac{520}{q+3}$ και η

συνάρτηση παραγωγής $q = \frac{10L^2}{\sqrt{L^2+8}}$. Να υπολογίσετε τα οριακά έσοδα προϊόντος για

$L=5$.

Λύση

$$\frac{dq}{dl} = \left(\frac{10L^2}{\sqrt{L^2+8}} \right)' = \dots = \frac{10L(L^2+16)}{(L^2+8)^{3/2}}. \text{ Υπολογίζουμε τώρα την εξής παράγωγο (τι μας}$$

$$\text{δείχνει???)}. \frac{dp}{dq} = \left(\frac{520}{q+3} \right)' = \dots = \frac{-520}{(q+3)^3}. \text{ Άρα η συνάρτηση εσόδων θα είναι.....,οπότε}$$

εάν παραγωγίσουμε την συγκεκριμένη συνάρτηση θα έχουμε ότι τα οριακά έσοδα θα

$$\text{δίνονται } \frac{dR}{dL} = \frac{10L(L^2+16)}{(L^2+8)^{3/2}} \left(p + q \left(\frac{-520}{(q+3)^3} \right) \right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{dR}{dL} \approx 88.5$$

Παράδειγμα 4. Συνάρτηση Κόστους

Έστω η ακόλουθη συνάρτηση συνολικού κόστους $C = 200 + 60q - 4q^2 + 0.1q^3$. Να υπολογιστεί το οριακό και το μέσο κόστος για ποσότητα 10 μονάδων. Να βρεθεί το μέγεθος παραγωγής που ελαχιστοποιεί το οριακό κόστος και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις συνολικού, μέσου και οριακού κόστους.

Λύση

Το οριακό κόστος δίνεται $MC = \frac{dTC}{dq} = 60 - 8q + 0.3q^2$. Άρα για $q=10$ θα έχουμε ότι

το οριακό κόστος είναι $MC=10$. Το μέσο κόστος υπολογίζεται ως εξής:

$$AC = \frac{TC}{q} = \frac{200 + 60q - 4q^2 + 0.1q^3}{q}. \text{ Για ποσότητα } q=10 \text{ θα έχουμε ότι το μέσο}$$

κόστος είναι 50 μονάδες.

Για να υπολογίσουμε σε ποιο μέγεθος παραγωγής ελαχιστοποιείται το οριακό κόστος

θα πρέπει $MC' = 0 \Leftrightarrow -8 + 0.6q = 0 \Leftrightarrow q = 13.3$. Για αυτή την τιμή η συνάρτηση

οριακού κόστους ελαχιστοποιείται.

Παράδειγμα 5 Μεγιστοποίηση Κερδών

Εάν η ζήτηση ενός αγαθού περιγράφεται από την συνάρτηση $q = 10 - 0.5p$ και το συνολικό κόστος παραγωγής του από την συνάρτηση $TC = 0.5q^2 + 5q + 100$.

- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.
- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί τα συνολικά έσοδα.
- Να βρεθεί το μέσο σταθερό κόστος που αντιστοιχεί στο επίπεδο παραγωγής (β).
- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Παράδειγμα 6 Μεγιστοποίηση Κερδών & Τέλειος Ανταγωνισμός (περισσότερα στο αντίστοιχο μάθημα μικροοικονομικής)

Έστω ότι η τιμή μιας τέλει ανταγωνιστικής αγοράς ισούται με 61 ν.μ και έστω ότι η συνάρτηση συνολικού κόστους μιας επιχείρησης που λειτουργεί σε αυτή την αγορά είναι $C(q) = q^3 - 11q^2 + 42q + 15$

- Να βρεθεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης.
- Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.
- Να βρεθούν τα σημεία καμπής της επιχείρησης

Συνέχεια στο επόμενο μάθημα !!!!!

Ασκήσεις προς λύση**Άσκηση 1**

Η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος είναι $q = 600 - 50p + 3p^2$. Να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης για τιμή 20 ευρώ. Αν η τιμή μεταβληθεί από 20 σε 20.5 ευρώ ποια θα είναι η ποσοστιαία μεταβολή στην ζήτηση (κατά προσέγγιση);

Άσκηση 2

Ένας οικονομολόγος υπολόγισε την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής $q = -5L + 60L^2$. Σε ποιο επίπεδο παραγωγής αρχίζει ο νόμος των φθινουσών αποδόσεων; Επίσης να βρεθούν τα σημεία που μεγιστοποιούνται οι συναρτήσεις του οριακού και του μέσου προϊόντος.

Άσκηση 3

$$C = 150 + 60q - 5q^2 + 0.25q^3,$$

Έστω οι ακόλουθες συναρτήσεις κόστους $C = 150 + 60q - 5q^2$,

$$C = 150 + 60q$$

1. Να υπολογιστεί το μέσο συνολικό κόστος, το μέσο μεταβλητό κόστος, το μέσο οριακό κόστος και το οριακό κόστος για κάθε από τις παραπάνω συναρτήσεις.
2. Να σχηματίσετε το γράφημα από τις παραπάνω συναρτήσεις.
3. Να υπολογίσετε το επίπεδο παραγωγής που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό, το μέσο μεταβλητό και το οριακό κόστος.

Άσκηση 4

Έστω οι ακόλουθες συναρτήσεις ζήτησης και κόστους μιας επιχείρησης:

$$q = 50 - 2.5p, C(q) = 0.01q^2 + 100q + 10000.$$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση συνολικών εσόδων.
2. Να βρεθεί η συνάρτηση κερδών και να υπολογιστεί το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος
3. Να υπολογιστεί η τιμή που αντιστοιχεί στο μέγιστο κέρδος.

Άσκηση 5

Μια μονοπωλιακή επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης $p = 1400 - 10q$, $C(q) = 5q^2 + 200q + 100$. Ποιο

επίπεδο παραγωγής μεγιστοποιεί τα κέρδη της επιχείρησης;