ΜΑΘΗΜΑ ΠΡΩΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΑΥΤΗΣ)

Α. *Εύρεση Πεδίου Ορισμού Συναρτήσεων-Άρτια και περιττή Συνάρτηση*

Η ανάλυση των πεδίων ορισμού για τις διαφορετικές πραγματικές συναρτήσεις έχει δοθεί στα μαθήματα θεωρίας. Ωστόσο θα ήταν επιθυμητό να εξετάζουμε το πώς θα μπορούσαμε να δουλεύουμε με συναρτήσεις που παρουσιάζουν μια πιο πολύπλοκη μορφή.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x^2-x}}$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν: $x-\sqrt{x^2-x}\geq 0, x^2-x\geq 0$. Άρα θα πρέπει να εξετάζω πότε συναληθεύονται οι δύο παραπάνω συνθήκες. Πιο συγκεκριμένα:

$x^2-x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x\leq 0 \vee x\geq 1)$ και

$x-\sqrt{x^2-x}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \sqrt{x^2-x} \Leftrightarrow \{^{x\geq 0}_{x^2\geq\sqrt{x^2-x}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x\geq 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτηση είναι $D_f=\{0\}\cup[1,+\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\log_x(2-x)$

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση μας ορίζεται μόνο όταν $x>0 \wedge x\neq 1, 2-x>0$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $D_f=(0,1)\cup(1,2)$.

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας!!!!)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{|x|-x-1}{\sqrt{x-|x|+1}}$

Απάντηση: $D_f=[0,+\infty)$

Παράδειγμα 4 (Μόνοι σας!!!!)

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = x^4\sqrt{9-4x^2}$ και να δειχθεί ότι είναι άρτια.

Απάντηση: $D_f = [-3/2, 3/2)$.

Β. *Έννοια Αντίστροφης Συνάρτησης*

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι το $D_f = [2, +\infty)$. Εάν η συνάρτηση μας είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) τότε αντιστρέφεται. Η f είναι αμφιμονοσήμαντη γιατί $\forall x_1, x_2 \in D_f = [2, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$,

$$\begin{cases} x_1-2 \neq x_2-2 \\ x_1-2\geq 0, x_2-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x_1-2} \neq \sqrt{x_2-2} \Rightarrow 1+\sqrt{x_1-2} \neq 1+\sqrt{x_2-2} \Rightarrow$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Άρα υπάρχει αντίστροφη της f. Για να βρούμε και τον τύπο συνάρτησης της f δουλεύουμε ως εξής:

$$\begin{cases} y=1+\sqrt{x-2} \\ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-1=\sqrt{x-2} \\ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)^2=|x-2| \\ y-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y^2-2y+3 \\ y\geq 1 \end{cases}$$. Άρα,

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 3, D(f^{-1}) = [1, +\infty)$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση (όπου υπάρχει) των συναρτήσεων $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}, g(x) = x^2$.
2. Ομοίως για την συνάρτηση που ορίζεται με το τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ εάν } x\geq 2 \\ 3x-2, \text{ εάν } x<2 \end{cases}$

Παράδειγμα 2 (Μόνοι σας!!!!)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$ είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της

C. *Σύνθεση Συναρτήσεων*

Παράδειγμα 1

Ας θεωρήσουμε τις εξής συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2-3x+2$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι τύποι των συναρτήσεων $f\circ g, g\circ f$.

<u>Λύση</u>

Ως γνωστό $f\circ g(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2-3x+2}$. Όσον αφορά το πεδίο ορισμού της σύνθεση $\begin{array}{l} D(f\circ g)=\{x\in D(g): g(x)\in D(f)\}=\{x\in R: g(x)\geq 0\}= \\ \{x\in R: x^2-3x+2\geq 0\}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)\end{array}$

Με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την εύρεση της σύνθεσης $g\circ f(x)$.

Παράδειγμα 2

Μπορούμε να καταλάβουμε ποιες συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν για την σύνθεση της εξής συνάρτησης $f(x)=\eta\mu(x^3)$;

Παράδειγμα 3 (Μόνοι σας!!!!)

Ας θεωρήσουμε τις εξής συναρτήσεις $f(x)=\ln x, g(x)=\sqrt{x-1}$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι τύποι των συναρτήσεων $f\circ g, g\circ f, f\circ f$.

Παράδειγμα 4 (Μόνοι σας!!!!)

Εάν $f(x)=\eta\mu x, g(x)=\sqrt{1-x^2}, h(x)=2x^2-1$ να βρεθεί η συνάρτηση $h\circ g\circ f$

D. *Μελέτη Συνάρτηση και κατασκευή της γραφικής της παράστασης.*

Η μελέτη συνάρτησης θα γίνει πλήρως αφού αναπτύξουμε και τις έννοιες των ορίων, της συνέχειας και της παραγώγου. Ωστόσο με βάση όσα γνωρίζουμε μπορούμε να απαντήσουμε σε ορισμένα ζητήματα. Τα βασικά στοιχεία που θα χρειαστούμε για την μελέτη μιας συνάρτησης συνοψίζονται παρακάτω.

(*Θα βοηθούσε βέβαια σε σημαντικό βαθμό η γνώση βασικών συναρτήσεων*)

- Το πεδίο ορισμού,
- Εάν είναι άρτια ή περιττή
- Εάν είναι περιοδική
- Ποια τα διαστήματα μονοτονίας καθώς και το είδος μονοτονίας σε κάθε τέτοιο διάστημα
- Για ποιες τιμές η συνάρτηση μας παρουσιάζει ακρότατη τιμή και ποια είναι αυτή;
- Ποια η γραφική της παράσταση;

Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4|x-1| + 3$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

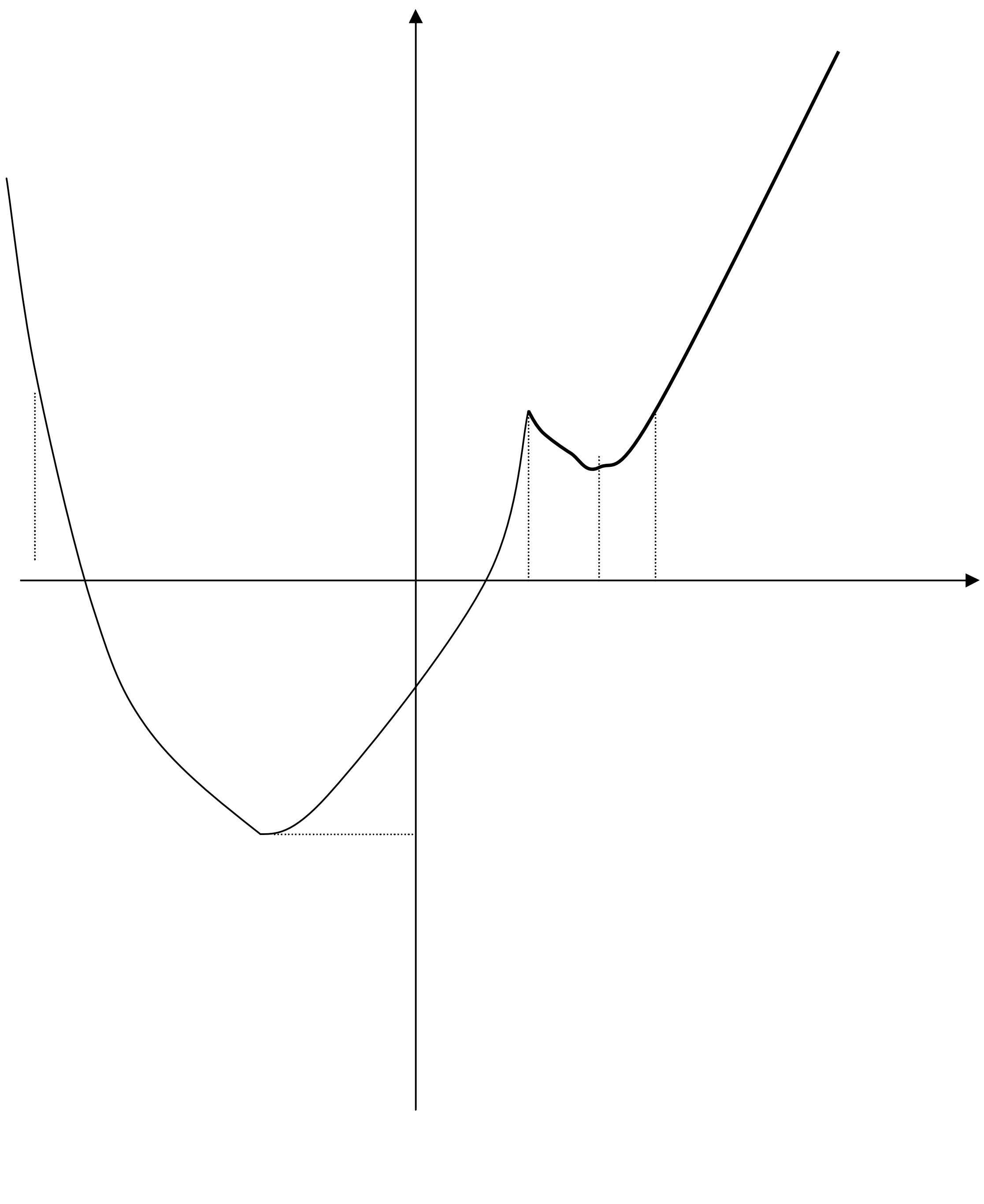
Εάν αναλύσουμε την απόλυτη τιμή που περιλαμβάνει η συνάρτηση μας θα έχουμε ότι: $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+7, & \text{εάν } x\geq 1 \\ x^2+4x-1, & \text{εάν } x<1 \end{cases}$. Γενικά οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δευτέρου βαθμού έχουν ως π.ο το R ενώ δεν είναι άρτιες ή περιττές κ.λ.π (*γενικά*)

Για το πρώτο σκέλος $f_1(x) = x^2 - 4x + 7, \text{ εάν } x \geq 1$.

Στο σημείο $\frac{-\beta}{2\alpha} = 2$ αλλάζει μονοτονία και από αριστερά του 2 είναι γνησίως φθίνουσα ενώ από δεξιά του γνησίως αύξουσα (*πινακάκι εδώ ή επειδή α>0*). Πιο συγκεκριμένα και λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό θα έχουμε ότι θα είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,2] και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Για την $f_2(x) = x^2 + 4x - 1, \text{ εάν } x<1$ γνωρίζουμε ότι στο $\frac{-\beta}{2\alpha} = -2$ αλλάζει μονοτονία. Πιο συγκεκριμένα και λαμβάνοντας υπόψη και τον περιορισμό θα έχουμε ότι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-2]$, γνησίως αύξουσα στο $[-2,1)$ γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ και, γνησίως αύξουσα στο $[2,-\infty)$

Στο σημείο (-2) παρουσιάζει ελάχιστο το f(-2)=-5 ενώ στο σημείο 2 ελάχιστο το 3 και μέγιστο στο σημείο 1 που ισούται με 4.

Η γραφική της παράσταση



Παράδειγμα 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Παράδειγμα 3

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Παράδειγμα 4

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu(2x)$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.