ΜΑΘΗΜΑ ΕΚΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ROLLE-BOLZANO-LANGRANGE-ΘΜΤ ΣΕΙΡΕΣ TAYLO-McLAURIN)

Α. *Βασικά Θεωρήματα*

Παράδειγμα 1.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$. Να βρεθούν όλα τα c που ικανοποιούν το ΘΜΤ για την συνάρτηση που είναι ορισμένη στο[-2,3].

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση μας ως πολυωνυμική ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ (γιατί;) οπότε θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει c:

$$f^{'}(c) = \frac{f(3) - f(-2)}{3-(-2)} = ... = -1 \Leftrightarrow 6c^2 - 6c - 12 = -1 \Leftrightarrow c_1 = 1.94, c_2 = -0.94$$

Παράδειγμα 2.(Μόνοι σας)

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 6x + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει τρεις πραγματικές άνισες ρίζες.

Παράδειγμα 3. (Μόνοι σας)

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^6 + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Παράδειγμα 4.(Μόνοι σας)

Να δειχτεί ότι $e^x \geq 1 + x, \forall x \in R$ καθώς και ότι $\log x \leq x - 1, \forall x \in R_+^*$.

Παράδειγμα 5.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση που η παράγωγος αυτής είναι $6x^5 - 4x + 1$ δηλαδή την συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^2 + x$. Για την συνάρτηση αυτήν έχουμε ότι $f(0) = f(1) = 0$ και στο διάστημα [0,1] είναι συνεχής ενώ στο διάστημα (0,1) παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f^{'}(\xi) = 0$. Άρα θα υπάρχει για την $6x^5 - 4x + 1 = 0$ τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

Παράδειγμα 6. (μόνοι σας)

Να δειχθεί ότι ισχύει $x - \frac{x}{2} < \ln(1 + x) < x, \forall x \in R_{+}$

Β. *Σειρές Taylor-McLAurin*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n=$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{n}(p)}{n!}(x-x_0)^n$$

Παράδειγμα 1.

Να βρεθεί η σειρά Taylor της $f(x)=(x-5)^{-1}$ γύρω από την τιμή 7.

Λύση

Υπολογίζουμε τις παραγώγους πρώτης δεύτερης τρίτης κ.λ.π τάξης για την συγκεκριμένη συνάρτηση. Άρα

$f^{'}(x)=(x-5)^{-2}, f^{''}(x)=2(x-5)^{-3}, f^{'''}(x)=(-3)2(x-5)^{-4}, f^{''''}(x)=4(3)(2)(x-5)^{-5}$.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται με μια επαναληπτικότητα την οποία θα μπορούσαμε στην γενίκευση του να την εκφράσουμε ως εξής:

$f(x)=(-1)^n[n(n-1)...2](x-5)^{-(n+1)}=(-1)^n n!(x-5)^{-(n+1)}$.Άρα στο σημείο 7 θα έχουμε

$f(7)=(-1)^n n!(7-5)^{-(n+1)}=(-1)^n n!(2)^{-(n+1)}$. Η σειρά Taylor θα δοθεί ως εξής:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n=$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n=f(x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(7)}{n!}(x-7)^n+R_n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{(n+1)}}(x-7)^n+R_n$$

Παράδειγμα 2.

Να διατυπωθεί η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ σε σειρά McLAurin.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε, όπως και πριν τις παραγώγους πρώτης δεύτερης τρίτης κ.λ.π τάξης για την συγκεκριμένη συνάρτηση. Θα έχουμε λοιπόν:

$f^{'}(x)=(1-x)^{-2}, f^{''}(x)=(1)(2)(1-x)^{-3}, f^{'''}(x)=(1)(2)(3)(1-x)^{-4}$. Οπότε θα μπορούσαμε να έχουμε ένα γενικευμένο αναγωγικό τύπο $f^{n}(x)=n!(1-x)^{n+1}$.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}x+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x)^2+...+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x)^{n-1}+R_n=$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x)^k+R_n$$

$$R_n=\frac{f^{n}(p)}{n!}(x-x_0)^n$$

Άρα θα έχουμε ότι η σειρά μας θα αναπτύσσεται ως εξής:

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}(x)^2+...+\frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}(x)^{n-1}+R_n=$$

$$=1+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}(x)^2+...+\frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}(x)^{n-1}+R_n=$$

$$=1+x+x^2+x^3+...+x^k+R_n$$

Παράδειγμα 3.

Να χρησιμοποιήσετε την σειρά Taylor για να βρείτε μια εκτίμηση για την συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$ για κάθε τιμή του x στο διάστημα [0,1].Ομοίως για την συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$. (*επιλέξτε* $x_0=0$ *και n τόσο μεγάλο έτσι ώστε* $\frac{\xi(x)}{n!}<0.0000001$ *).*

Παράδειγμα 4.

Να βρεθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x-5}$ για c=7

Παράδειγμα 5.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$. Να βρείτε το πολυώνυμο MacLaurin τρίτου βαθμού και με την βοήθεια αυτού να προσεγγίσετε το $\ln(1,1)$

Παράδειγμα 6.

Να διατυπωθεί σε ανάπτυγμα MacLaurin η συνάρτηση $f(x)=2x-x^2+4x^3+4$.

Παράδειγμα 7.

Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτηση $f(x)=2x-x^2+4x^3+4$ για x=c.

Παράδειγμα 8.

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση του ημx αναπτύσσεται σε σειρά McLaurin με άπειρους όρους. Ισχύει το ίδιο για την σειρά του συνημίτονου.