ΜΑΘΗΜΑ ΕΒΔΟΜΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ
ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Α. *Μαθηματικές Εφαρμογές*

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$.

Λύση

Παρατηρώ ότι εάν θεωρήσουμε ότι $g(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow g'(x) = 2x + 2$. Οι $g(x), g'(x)$ είναι συνεχείς με $g(x) \neq 0$ στο καθένα από τα $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, +\infty)$. Άρα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$I = \int \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{(x^2+2x-3)'}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{2}\log\left|x^2+2x-3\right|$ με προφανή διαστήματα ολοκλήρωσης τα παραπάνω.

Παράδειγμα 2.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int x e^{x^2} dx$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αλλαγής μεταβλητής θέτοντας $x^2 = t$. Πρώτη δουλεία είναι το να υπολογίσουμε το διαφορικό. Άρα θα έχουμε ότι $dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$. Οπότε το ολοκλήρωμα μας θα δίνεται ως εξής:

$$I = \int x e^{x^2} dx = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Παράδειγμα 3.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int (2x+1)e^{x^2+x}dx$

Λύση

Θέτουμε $x^2 + x = u$. Άρα θα έχουμε ότι $du = (2x+1)dx$. Οπότε το ολοκλήρωμα μας θα διαμορφωθεί ως εξής: $I = \int (2x+1)e^{x^2+x}dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2+x} + c$.

Παράδειγμα 4.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int x^3 \ln x dx$

Λύση

Για τον υπολογισμό του συγκεκριμένου ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Έτσι θα έχουμε:

$$I = \int x^3 \ln x dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}\left(\ln x\right)' dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^3}{4}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστούν με βάση τις παραπάνω μεθόδους τα κάτωθι ολοκληρώματα:

$1.\int 2x(x^2+3)^4\,dx \quad 2.\int x(x^2+3)^{3/2}\,dx$

$3.\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+8}}\,dx \quad 4.\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$

$5.\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx \quad 6.\int (x+4)\ln x\,dx$

$7.\int e^x \eta\mu x\,dx \quad 8.\int \sqrt{3x^2+3x+1}\,dx$

$9.\int \frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \quad 10.\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

$11.\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx \quad 12.\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4\,dx$

$13.\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx \quad 14.\int \cos^4 x\,dx$

$15.\int \frac{3}{x^2+4}\,dx \quad 16.\int \frac{2x}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$

$17.\int \frac{2x+3}{x^2(x-3)}\,dx \quad 18.\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

$19.\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2+2x+2}\,dx \quad 20.\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$

Β. *ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ*

Παράδειγμα 1.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια βιομηχανία το οριακό κόστος παραγωγής q ποσότητας δίνεται ως εξής $3q^2 - 30q + 200$ νομισματικές μονάδες. Το συνολικό κόστος παραγωγής 3 μονάδων είναι 800 ν.μ. ποιο το συνολικό κόστος παραγωγής των πρώτων 6 μονάδων;

Λύση

Ως γνωστό το οριακό κόστος είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης του συνολικού κόστους παραγωγής. Άρα θα μπορούσαμε να έχουμε ότι:
$TC(q) = \int TC^{'}(q) = \int (3q^2 - 30q + 200)dq = q^3 - 15q^2 + 200q + c$. Για να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς c θα εργαστούμε ως εξής γνωρίζοντας ότι όταν η βιομηχανία παράγει 3 μονάδες το συνολικό κόστος είναι 800 ν.μ.:
$800 = 3^3 - 15 * 3^2 + 2003 + c \Leftrightarrow c = 308 \nu.\mu.$. Άρα το συνολικό κόστος για τις 6 παραγόμενες μονάδες θα είναι $TC(6) = ... = 6^3 - 15 * 6^2 + 200 * 6 + 308 = 1.184 \nu.\mu$

Παράδειγμα 2.

Η οριακή πρόσοδος μιας επιχείρησης δίνεται από την εξής συνάρτηση $MR = 1 - 3q - 4q^2$. Να υπολογιστούν η συνολική πρόσοδος και η συνάρτηση ζήτησης της επιχείρησης

Παράδειγμα 3.

Ο ρυθμός απόσβεσης ενός μηχανήματος δίνεται ως εξής 220(t-10)ευρώ τον χρόνο. Εάν το μηχάνημα αγοραστεί ως καινούργιο στην τιμή των 120000 ευρώ ποια η αξία που θα έχει σε δέκα χρόνια;

Λύση

Η συνάρτηση απόσβεσης του μηχανήματος είναι:

$A(t)=\int 220(t-10)dt=110t^2-2200t+c$. Εάν τώρα θέσουμε την χρονική περίοδο ίση με 0 δηλαδή θεωρήσουμε την περίοδο που αγοράστηκε το μηχάνημα μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά c. $A(0)=12000 \Leftrightarrow c=120000$ οπότε για να υπολογίσουμε την αξία σε 10 έτη $A(10)=110*10^2-2200*10+120000=109000$

Παράδειγμα 4

Η οριακή ροπή για κατανάλωση μιας χώρας δίνεται από την εξής σχέση: $\frac{dC}{dY}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5\sqrt{7Y}}$ όπου C είναι η κατανάλωση που είναι συνάρτηση του διαθέσιμου εισοδήματος. Γνωρίζουμε ότι όταν το διαθέσιμο εισόδημα είναι 22ν.μ τότε η κατανάλωση είναι 18 ν.μ. Ποια είναι η συνάρτηση κατανάλωσης αυτής της χώρας;

Λύση

Η οριακή ροπή για κατανάλωση είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κατανάλωσης ως προς το εισόδημα .Άρα,

$C(Y)=\int\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5\sqrt{7Y}}\right)dY=...=\frac{4}{5}Y-\frac{3\sqrt{7Y}}{10}+c$.Οπότε για τον υπολογισμό της σταθεράς θα εργαστούμε ως εξής $C(22)=18 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow c=12.8$. Άρα η συνάρτηση κατανάλωσης είναι η εξής: $C(Y)=\frac{4}{5}Y-\frac{3\sqrt{7Y}}{10}+12.8$.

Παράδειγμα 5.

Μια βιομηχανία παράγει ένα προϊόν Α. Είναι γνωστό ότι το οριακό κόστος της βιομηχανίας δίνεται από την σχέση $MC(q)=10q+200$ όπου q είναι η παραγόμενη ποσότητα και το σταθερό κόστος είναι 100 χρηματικές μονάδες. Επίσης είναι γνωστό ότι το οριακό έσοδο της βιομηχανίας είναι $MR(q) = 1400 - 20q$. Να υπολογίσετε την συνάρτηση κόστους και ζήτησης της βιομηχανίας.

Παράδειγμα 6.

Έστω ότι το οριακό κόστος μιας επιχείρησης δίνεται από την συνάρτηση $\frac{dMC}{q} = 20e^{-0.5q}$ και ότι τα σταθερά κόστη είναι 50 χρηματικές μονάδες. Να υπολογιστεί το συνολικό κόστος της επιχείρησης.

Παράδειγμα 7.

Η συνάρτηση οριακών κερδών μιας επιχείρησης όταν η παραγωγή κυμαίνεται μεταξύ 40 και 70 μονάδων, έχει υπολογιστεί ότι είναι $\Pi'(q) = \frac{-q^2}{10} 5q - 3$. Να υπολογιστεί το μέσο κέρδος της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ των 40 και 70 μονάδων.

Παράδειγμα 8

Οι καθαρές επενδύσεις μιας οικονομίας περιγράφονται από την εξίσωση $I(t) = 90t^{4/5}$. Το αρχικό απόθεμα κεφαλαίου είναι 100. να βρεθεί η συνάρτηση του αποθέματος κεφαλαίου, όπως επίσης και το απόθεμα κεφαλαίου την περίοδο 10.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση αποθέματος δίνεται $K(t) = \int I(t)dt = \int 90t^{4/5} = 50t^{9/5} + 100$. Άρα για t=10 θα έχουμε ότι $K(10) = 50 * 10^{9/5} + 100 = 3255$.

Παράδειγμα 9.

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν Α. Η συνάρτηση οριακού εσόδου είναι $MR(q) = 20 - 4q$ όπου q η ποσότητα παραγωγής. Να υπολογιστούν:

Τα έσοδα της επιχείρησης όταν παράγει 10 μονάδες προϊόντος

Να βρεθεί η συνάρτηση ζήτησης και να υπολογίσετε την ελαστικότητα της όταν q=10.

Να υπολογίσετε τα μέσα έσοδα της επιχείρησης για το επίπεδο παραγωγής μεταξύ 8-15 μονάδων.

Παράδειγμα 10.

Η συνάρτηση ζήτησης για κάποιο αγαθό είναι $p = 8(65 - q^2)$ για κάθε μονάδα προϊόντος. Να βρεθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή για οποιαδήποτε τιμή μονάδων.

<u>Λύση</u>

Η ποσότητα η οποία και πωλείται σε συγκεκριμένη τιμή υπολογίζεται πολύ εύκολα με απλή αντικατάσταση. Το πλεόνασμα του καταναλωτή θα δίνεται ως εξής:

$$CS = \int I(q)dq = \int (65 - q^2)dq = 65q - \frac{q^3}{3}$$

(*με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται και πλεόνασμα παραγωγού*)