Στην οικονομική επιστήμη είναι ευρέως γνωστό ότι γίνεται χρήση στοιχείων τα οποία συγκεντρώνονται από υπηρεσίες ή οργανισμούς (Παγκόσμια Τράπεζα, ΟΟΣΑ, Ελληνική Στατιστική Υπηρεσία, Διεθνής Οργανισμός Ενέργειας). Τα στοιχεία αυτά απεικονίζουν μεταβλητές όπως το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν ή η κατανάλωση ενέργειας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (π.χ ετήσια, εβδομαδιαία, μηνιαία ή ημερήσια). Σε αρκετές ωστόσο περιπτώσεις, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την συμπεριφορά ενός μεγέθους στον χρόνο αλλά και το να εξετάσουμε την μεταβολή του. Το μέγεθος αυτό μπορεί να αντιστοιχεί είτε σε μια συνεχή είτε σε μια διακριτή μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή οι έννοιες της ακολουθίας αλλά και των σειρών είναι αρκετά σημαντικές. Επίσης σημαντική φαντάζει και η έννοια της προσέγγισης της τιμής μιας μεταβλητής η οποία και εισάγει στην κουβέντα μας και στον παρόν κεφάλαιο την έννοια του ορίου.

Στο τέλος του συγκεκριμένου παραρτήματος[1] θα είσαστε στην θέση να:

- Γνωρίζετε την έννοια της ακολουθίας, της σειράς και του ορίου.
- Να πραγματοποιείτε πράξεις που αφορούν τα όρια και την σύγκλιση ακολουθιών
- Υπολογίζετε την σύγκλιση ακολουθίας, σειράς και ορίου σε πραγματικό αριθμό αλλά και στο άπειρο.
- Χρησιμοποιείτε τις παραπάνω έννοιες σε περιπτώσεις οικονομικών εφαρμογών.

Π.1 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Π.1.1 Έννοια ακολουθίας

Ως ακολουθία ορίζεται κάθε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $a_n : \mathrm{N} \to R$. Μια ακολουθία μπορεί να παρασταθεί, γενικά, με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος αφορά την χρήση της αναγραφής των όρων της ως εξής: $a_1, a_2, a_{3,} ...., a_N$ (π.χ 1,3,5,7,9….) ενώ ο δεύτερος την χρήση ενός γενικού τύπου όπως για παράδειγμα $a_n = f\left(n\right)$ (π.χ 1+1/n). Τέλος, ο τρίτος τρόπος αφορά την

[1] Το παρόν παράρτημα συμπληρώνει βασικές έννοιες που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 3 και αποτελεί εισαγωγή στο Κεφάλαιο 4 που αναπτύσσεται η έννοια της παραγώγου.

χρήση ενός αναδρομικού τύπου ως εξής $a_n = f\left(a_{n-1}\right)$[2]. Για παράδειγμα μπορείτε να θεωρήσετε ως ακολουθίες τις παρακάτω εκφράσεις {2,5,7,12,19…} και {2,8,32,128…}. Στην πρώτη περίπτωση κάθε αριθμός, αρχίζοντας από τον τρίτο, προκύπτει ως άθροισμα των δύο προηγούμενων ενώ στην δεύτερη ως γινόμενο κάθε αριθμού με το 4.

Υπακολουθία μιας ακολουθίας $\left\{a_n\right\}$ καλούμε μια ακολουθία της μορφής $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3,}, ..., a_{nk}, ...$ όπου ισχύει ότι $n_1 < n_2 < ... < n_k < .....$. Κοντινή στην έννοια της υπακολουθίας είναι και οι έννοιες lim sup και lim inf. Έστω μια ακολουθία $\left\{a_n\right\}$ και το σύνολο $\mathrm{A} = \left\{b : \text{υπαρχει υπακολουθια } a_n^*, a_n^* \to b\right\}$ τότε ορίζουμε ως $\limsup a_n = \sup A, \lim\ \inf a_n = \inf\ A$.

Τόσο οι ακολουθίες αλλά και οι υπακολουθίες μπορούν να παρασταθούν με την χρήση ενός γενικού τους όρου λαμβάνοντας τιμές από το πεδίο ορισμού τους ως εξής:

$$f\left(n\right) = \frac{4n}{n^2+2}, g\left(n\right) = \frac{4n}{n^2+1}, h\left(n\right) = \sqrt{\frac{n}{n^2-4}}$$

Για παράδειγμα στην πρώτη περίπτωση οι όροι της ακολουθίας είναι {4/3,4/3,12/11,…}. Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι εάν θεωρήσουμε ως σύνολο Α το σύνολο ακολουθιών πραγματικών αριθμών μπορούμε να ορίσουμε πράξεις όπως η πρόσθεση και η αφαίρεση ακολουθιών, το γινόμενο πραγματικού αριθμού με ακολουθία, το γινόμενο και το πηλίκο ακολουθιών καθώς και την απόλυτη τιμή αλλά και την τετραγωνική ρίζα ακολουθίας.

Η ακολουθία[3] που όλοι της οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους δηλαδή για κάθε n που ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών ισχύει ότι $a_n = \alpha$ τότε καλείται **σταθερή**. Επίσης, μια ακολουθία θα λέγεται **αύξουσα** εάν και μόνο εάν $a_{n+1} \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και **φθίνουσα** εάν και μόνο εάν $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Τέλος, μια ακολουθία θα καλείται **φραγμένη άνω ή αντίστοιχα κάτω** τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Μ τέτοιος ώστε $a_{n+1} \leq \mathrm{M}, \forall n \in \mathbb{N}$ και $a_{n+1} \geq \mathrm{M}, \forall n \in \mathbb{N}$. Προφανώς στην περίπτωση αυτή το σύνολο καλείται φραγμένο (άνω ή κάτω). Σε αυτό το σημείο

[2] Επειδή το πεδίο ορισμού της ακολουθίας είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών η μεταβλητή τους συμβολίζεται με n και όχι με x όπως έχουμε συνηθίσει στις συναρτήσεις.

[3] Προσοχή δεν θα πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ της έννοιας της ακολουθίας η οποία ουσιαστικά είναι απεικόνιση (σύνολο διατεταγμένων ζευγών της μορφής (n,a_n) με το πεδίο τιμών της απεικόνισης. Επομένως δύο ακολουθίες θα είναι ίσες εάν ισχύει $a_n = b_n$.

αναφέρουμε δύο βασικά θεωρήματα (*χωρίς την απόδειξή τους*) τα οποία συνδέουν τις έννοιες της φραγμένης ακολουθίας με την σύγκλιση.

Θεώρημα 1 Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Θεώρημα 2 Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Π.1.2 Σύγκλιση Ακολουθιών

Μια ακολουθία a_n θα λέγεται συγκλίνουσα σε έναν πραγματικό αριθμό a εάν τον προσεγγίζει. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να γράψουμε ότι $\lim a_n = a$ [4].Μια πιο αυστηρή προσέγγιση μπορεί να δοθεί ακολουθώντας τον παρακάτω ορισμό:

$\lim a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathrm{N} : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_0$. Προφανώς, μια ακολουθία θα καλείται αποκλίνουσα όταν αυτή δεν συγκλίνει και συγκλίνουσα όταν αυτή συγκλίνει. Στην περίπτωση που συγκλίνει στον αριθμό μηδέν καλείται μηδενική.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε την ακολουθία $f(n) = \frac{1}{n+1}$. Με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού να εξετάσετε εάν αυτή συγκλίνει στον αριθμό 0.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό έχουμε $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathrm{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \in \mathrm{N}, n \geq n_0$ να ισχύει $\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$. Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε ότι $n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$. Συνεπώς, μπορούμε να διαλέξουμε κατάλληλο n_0 τέτοιο ώστε $n_0 = \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)$ με το όριο της $f(n) = \frac{1}{n+1}$ να τείνει στο μηδέν[5].

Ακολουθία που συγκλίνει στο άπειρο.

[4] Ο αριθμός a καλείται **όριο** της ακολουθίας.

[5] Μια ακριβώς ανάλογη λογική, στηριζόμενη στον ορισμό βέβαια, θα ακολουθηθεί για τον υπολογισμό του ορίου μιας συνάρτησης.

Μια ακολουθία θα λέμε ότι συγκλίνει στο άπειρο (εννοώντας το $+\infty$) όταν ισχύει ότι $\lim a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{M} > 0, \exists\, n_0 \in \mathrm{N} : a_n > \mathrm{M} \ \forall\ n \geq n_0$. Αναλόγως μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση του ορισμού στο $-\infty$.

Παράδειγμα 2.

Θεωρήστε την ακολουθία $f(n) = 6^{4n-1}$. Με την βοήθεια του παραπάνω ορισμού να εξετάσετε εάν αυτή συγκλίνει στον αριθμό $+\infty$ όταν το n τείνει στο $+\infty$.

Εάν για κάποιο θετικό αριθμό M μπορούμε να βρούμε ένα άλλο θετικό αριθμός N=N(M)= n_0 . τέτοιον ώστε $n_0 \in \mathrm{N} : a_n > \mathrm{M} \ \forall\ n \geq n_0$ τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το όριο θα τείνει στο $+\infty$. Άρα $6^{4n-1} > \mathrm{M}$ και λογαριθμίζοντας και εκτελώντας τις πράξεις θα έχουμε: $n = \dfrac{\ln M + \ln 6}{4 \ln 6} \equiv n_0$. Άρα, για κάθε $n_0 = \dfrac{\ln M + \ln 6}{4 \ln 6}$ έχουμε ότι το $\lim\limits_{n \to +\infty} 6^{4n-1} = +\infty$.

<u>Ασκήσεις</u>

Π1.2.1 Να υπολογίσετε τον n-οστό όρο των παρακάτω ακολουθιών:

(i) {1,2,3,4,…}

(ii){1,1/2,4,1/8,16,…}

Π1.2.2 Να εξετάσετε ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι υπακολουθία της {-1,1,-1,1…}

(i){2,3/2,4/3}

(ii) {0,-1/2,2/3,-3/4}

Π1.2.3 Θεωρείστε την παρακάτω ακολουθία $f(n) = \dfrac{4n-1}{5n+6}$.

(i) Να υπολογίστε τον πρώτο, δεύτερο και εκατοστό όρο αυτής.

(ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου να δείξετε ότι το όριο της είναι το 4/5.

Π1.2.4 Θεωρείστε την παρακάτω ακολουθία $f(n) = (1-4n)$.

(i) Να υπολογίστε τον πρώτο, δεύτερο και εικοστό όρο αυτής.

(ii) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου να δείξετε ότι το όριο της όταν το n τείνει στο $-\infty$ είναι το $-\infty$.

Π1.2.5 Να εξετάσετε εάν η παρακάτω ακολουθία $f(n)=\frac{n}{n+10}$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα και επίσης εάν είναι φραγμένη.

Π1.2.6 Για την ακολουθία $f(n)=(-1)^n$ να υπολογίσετε τα limsup και liminf.

Π.1.3 Βασικά Θεωρήματα, ιδιότητες υπολογισμού και όρια

Σε αυτήν την ενότητα συνοψίζουμε βασικά θεωρήματα τα οποία μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε στην εύρεση ορίων σύγκλισης μιας ακολουθίας καθώς και βασικά όρια γνωστών ακολουθιών. Θα παροτρύνουμε τους φοιτητές για την απόδειξη των θεωρημάτων αυτών εν είδη ασκήσεων. Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι:

Θεώρημα 3 Κάθε ακολουθία περιέχει μια υπακολουθία η οποία είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Μάλιστα, εάν η ακολουθία συγκλίνει στο a τότε κάθε υπακολουθία της θα συγκλίνει στο a.

Θεώρημα 4 Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει μια τουλάχιστον συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 5 Το όριο μιας ακολουθίας, εάν αυτό υπάρχει βέβαια, είναι μοναδικό.

Θεώρημα 6 Εάν $\lim a_n = a$ και $\lim b_n = b$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$
- $\lim(kb_n) = k\lim b_n = kb$
- $\lim(a_n \bullet b_n) = \lim a_n \bullet \lim b_n = a \bullet b$
- $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = a/b$
- $\lim(a_n)^M = (\lim a_n)^M$
- $\lim M^{a_n} = M^{\lim a_n}$

Θεώρημα 7 Εάν $a_n \le b_n \le c_n, \forall n, \lim a_n = a, \lim c_n = a$ τότε $\lim b_n = a$. Το παραπάνω θεώρημα 7 καλείται θεώρημα **ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών**.

Τα παραπάνω θεωρήματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας. Ωστόσο, θα ήταν αρκετό χρήσιμο οι φοιτητές μας να γνωρίζουν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών χωρίς να χρειάζεται κάθε φορά να προβούν στην απόδειξή τους.

$$1.\lim\frac{1}{n}=0,\ 2.\lim\sqrt[n]{n}=1$$

$$3.\lim\frac{1}{n^p}=0,\ p\in\mathbb{Q},\ 4.\lim\sqrt[n]{a}=1, a\in\mathbb{R}^+$$

$$5.\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ 6.\lim x^n=\begin{cases}0, |x|<1\\ 1, x=1\\ +\infty, x>1\\ \exists, x\le -1\end{cases}$$

$$7.\lim\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_0}{b_l n^l+b_{l-1}n^{l-1}+...+b_0}=\begin{cases}+\infty, x>1\\ \frac{a_k}{b_l}, k=1\\ 0, k<1\end{cases}$$

Θεώρημα 8 (Κριτήριο D'Alembert) Εάν θεωρήσουμε μια ακολουθία a_n και $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$ [6]. Εάν α>1 τότε η προς εξέταση σειρά αποκλίνει. Από την άλλη πλευρά εάν α<1 τότε η σειρά και συγκλίνει ενώ στην περίπτωση που α=1 δεν μπορούμε να έχουμε απόφαση σχετικά με την σύγκλιση-απόκλισή της.

Παράδειγμα 3 Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\lim\sqrt[n]{\frac{2^n n!}{(3n)^n}}$

Με βάση το θεώρημα 8 και παρατηρώντας ότι $a_n>0$ έχουμε ότι

$$\lim\frac{2^{n+1}(n+1)!\Big/\left(3(n+1)\right)^{n+1}}{2^n(n)!\Big/(3n)^n}=...=\frac{2}{3e}\ge 0$$. Οπότε $\lim\sqrt[n]{\frac{2^n n!}{(3n)^n}}=\frac{2}{3e}$

Παράδειγμα 4 Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\lim\frac{8n^5+9n^4+1}{9n^5+8n^3+2n^2+1}$

Η εύρεση του ορίου στην συγκεκριμένη άσκηση είναι αρκετά απλή καθώς θα πρέπει να διαιρέσουμε με τον μεγιστοβάθμιο όρο[7]. Συνεπώς θα έχουμε ότι :

$$\lim\frac{8n^5+9n^4+1}{9n^5+8n^3+2n^2+1}=\lim\frac{8+9n^4/n^5+1/n^5}{9+8n^3/n^5+2n^2/n^5+1/n^5}$$. Γνωρίζοντας όμως ότι το όριο 1/n τείνει στο μηδέν υπολογίζουμε το όριο ως 8/9.

[6] Το παραπάνω χρησιμοποιείτε σε αρκετές ασκήσεις χρησιμοποιώντας τον λόγο και συγκρίνοντας με την μονάδα. Προσοχή οι όροι θα πρέπει να είναι ομόσημοι. Σε μια γενικότερη προσπάθεια εύρεσης χρησιμοποιείται η διαφορά a_{n+1}-a_n και με την βοήθεια του ορισμού προσπαθούμε να συμπεράνουμε.
[7] Ίδια τακτική εφαρμόζουμε και στην εύρεση ορίου συνάρτησης.

Παράδειγμα 5 Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$

Η εύρεση του ορίου στηρίζεται στο εξής:

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}=$$

$$\lim\sqrt{n}\frac{n+2-n-1}{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1/n+1}\right)}=\frac{1}{2}$$

Θεώρημα 9 (Cauchy) Εάν θεωρήσουμε μια ακολουθία $a_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$ και $\lim a_n=a$ τότε $\lim\sqrt[\nu]{a_1a_2...a_n}=\alpha$.

Παράδειγμα 6 Να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας $a_n=\frac{n^2}{2^n}$

Έχουμε ότι $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\lim\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}}=\lim\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\lim\sqrt[n]{n}\right)^2=\frac{1}{2}<1$

Οπότε η παραπάνω ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν.

<u>Ασκήσεις</u>

Π1.3.1 Να εξετάσετε ως προς την σύγκλισή τους τις ακολουθίες

(i) $\lim\frac{4n^3+17}{12n^3+2n^2+13}$.

(ii) $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

(ii) $\lim\frac{1+2^n}{4^n+5}$.

Π1.3.2 Να εξετάσετε ως προς την σύγκλισή τους τις ακολουθίες

(i) $\frac{k^n}{n!}$. (ii) $\left(\frac{3-(-1)^n4}{n^2}\right)^{n-2}$. (ii) $\frac{3^n+4^n}{5^n}$.

Π1.3.3 Δείξτε ότι η ακολουθία $\frac{(-1)^n(n+3)}{n+2},n\in\mathbb{N}^*$ δεν συγκλίνει.

Π.2 Σειρές, αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος-Εφαρμογές στα Οικονομικά.

Π2.1 Έννοιες της σειράς και της αριθμητικής και γεωμετρική προόδου

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των εννοιών της σειράς απείρων αριθμών καθώς και της αριθμητικής και γεωμετρικής σειράς (προόδου). Στόχος της παρούσας ενότητας είναι το να κατανοήσουν οι φοιτητές το πως αυτές οι έννοιες χρησιμοποιούνται σε σύγχρονα προβλήματα οικονομικής φύσης.

Αρκετές φορές συναντάμε αθροίσματα της μορφής $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}$ τα οποία θα θέλαμε να εκφράσουμε με μια πιο σύντομη μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση του συμβόλου του αθροίσματος και συνεπώς το παραπάνω άθροισμα μπορεί να αποδοθεί ως $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ η οποία και λύνει το πρόβλημα της γενικής παρουσίασης. Το παραπάνω άθροισμα καλείται σειρά και αποτελεί μια ειδική μορφή ακολουθίας. Για παράδειγμα αθροίσματα όπως 1+3+5+7+9+…+, 1-1/2+1/3-1/4+… μπορούν κάλλιστα να αποδοθούν ως $\sum_{n=1}^{\infty}2n+1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Προφανώς μια σειρά μπορεί εκτός από άπειρο αριθμό όρων να έχει και πεπερασμένο (π.χ $\sum_{n=1}^{3}2n+1=3+5+7=15$). Ωστόσο, τα βασικά σημεία που θα απασχολήσουν στις σειρές αφορούν α) την σύγκλιση-απόκλισή τους και β) το αποτέλεσμα των παραπάνω αθροισμάτων (αριθμητική του προσέγγιση). Μάλιστα ένας απλό ορισμός της σειράς θα μπορούσε να δοθεί ως εξής:

Εάν θεωρήσουμε μια ακολουθία a_n τότε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, n=1,2,3...$ καλείται **σειρά.** Όπως προ είπαμε επειδή η σειρά πραγματικών αριθμών είναι μια ειδική μορφή ακολουθίας τα όποια αποτελέσματα προκύπτουν για τις ακολουθίες θα μπορούν να εφαρμοστούν και στις σειρές. Μάλιστα τα κριτήρια Cauchy και D'Alembert τα οποία συνδέονται με τα θεωρήματα 8 και 9 αποκτούν σημαντικό ρόλο στην εύρεση της σύγκλισης μια σειράς. Από τις πιο γνωστές σειρές πραγματικών αριθμών που χρησιμοποιούνται σε αρκετές εφαρμογές είναι η αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος.

Πολλές φορές στα οικονομικά εξετάζονται μεταβλητές (π.χ Ακαθάριστο εγχώριο προϊόν, άμεσες ξένες επενδύσεις, πληθωρισμός, ανεργία) των οποίων η μεγέθυνσή (*growth*) τους καθιστά την μελέτη τους ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα και καθοριστική για προτάσεις πολιτικής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει, ωστόσο, η πρόβλεψη της μελλοντικής του τιμής. Σε μια τέτοια περίπτωση όπου γνωρίζουμε ότι η εξεταζόμενη μεταβλητή αλλάζει με σταθερό ρυθμό θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την *αριθμητική πρόοδο* έτσι ώστε να έχουμε μια πρώτη εκτίμηση. Από την άλλη πλευρά

ένα πρόβλημα που εμφανίζεται με την παρουσία ελλειπουσών τιμών σε αρκετές χρονολογικές σειρές θα μπορούσε να λυθεί με την χρήση μέσω της τεχνική της γραμμικής παρεμβολής[8] (linear interpolation).Η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιεί στοιχεία όπως ο πρώτος ή και ο τελευταίος όρος για να αντιστοιχίσει στοιχεία τα οποία παραλείπονται.

Μια ακολουθία αριθμών $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$, ... θα λέμε ότι αποτελεί αριθμητική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν υπάρχει ένας αριθμός ω, έτσι ώστε $a_{n+1} = a_n + \omega, n = 1,2,3....$ Ο αριθμός ω αποκαλείται λόγος ή διαφορά της αριθμητικής προόδου. Η αριθμητική πρόοδος αποκαλείται και πρόοδος κατά διαφορά, γιατί εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με ω. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι για ω>0 η πρόοδος είναι αύξουσα, για ω<0 φθίνουσα ενώ για τιμή ίση με το μηδέν είναι μια σταθερή ακολουθία. Μια αριθμητική πρόοδος μας είναι γνωστή όταν μας δοθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της. Μάλιστα ο ν-οστός όρος μιας αριθμητική προόδου δίνεται από την τύπο $a_n = a_1 + (n-1)\omega, \forall n \in \mathbb{N}$ (*προσπαθήστε να υπολογίσετε τον 11ο όρο της ακολουθίας 3,5,7…*). Τέλος, το άθροισμα των n πρώτων όρων μια αριθμητικής προόδου δίνεται από τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ (*προσπαθήστε να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της σειράς 15,11,7…*).

Συχνά όμως στην οικονομική επιστήμη οι μεταβολές που παρατηρούνται δεν ακολουθούν μια γραμμική πορεία αλλά τείνουν να αυξομειώνονται αναλογικά σε σχέση με την αρχική παρατήρηση. Στην περίπτωση αυτή η χρήση της γεωμετρικής προόδου δεν είναι δόκιμη και έτσι χρησιμοποιείται η γεωμετρική πρόοδος. Σε αυτήν την περίπτωση μια ακολουθία πραγματικών αριθμών θα καλείται γεωμετρική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του προηγούμενου όρου της με τον ίδιο αριθμό. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την σειρά 3,9,27,81,… όπου ο πρώτος της όρος είναι ο αριθμός α_1=3 ενώ ο κάθε όρος προκύπτει εάν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο με τον αριθμό λ=3. Άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\alpha_n = \alpha_{n-1}*\lambda$ ή ότι $\alpha_n = \alpha_1*\lambda^{n-1}$ (*προσπαθήστε να υπολογίσετε τον 11ο όρο της ακολουθίας 3,5,7…*). Τέλος, όπως και στην αριθμητική σειρά το άθροισμα των n

[8] Οικονομετρικά ευρέως χρησιμοποιούμενα λογισμικά όπως η STATA την εντάσσουν στον κώδικά τους.

πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου υπολογίζεται ως εξής: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$

(*προσπαθήστε να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της σειράς 3,9,27…*).

Π2.2 Οικονομικές εφαρμογές της αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου

Κεφάλαιο, επιτόκιο (ονομαστικό και πραγματικό) και χρόνος αποπληρωμής

Μια από τι πιο γνωστές εφαρμογές στα οικονομικά και πιο συγκεκριμένα στα χρηματοοικονομικά και στην αξιολόγηση επενδύσεων αφορά το απλό επιτόκιο και το επιτόκιο δανεισμού και προφανώς τις μεταβολές που υπεισέρχονται στο αρχικό κεφάλαιο. Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής καταθέτει ένα αρχικό ποσό K σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης r. Στο τέλος του πρώτου έτους το ποσό που επενδύεται αποτυπώνεται ως $K+Kr=K(1+r)$ ενώ στο δεύτερο έτος ως $K(1+r)^2$. Εάν η διαδικασία αυτή συνεχιστεί για n έτη πάρα πολύ απλά έχουμε να εξετάσουμε μια γεωμετρική πρόοδο της οποίας το νέο κεφάλαιο (n-οστό) με βάση το αρχικό K_0 θα δίνεται με βάση τον τύπο[9] (**μελλοντική αξία του K_0**):

$$K_n = K_0 (1+r)^n \quad (1)$$

Βέβαια υπάρχει και η περίπτωση όπου το ποσό που προκύπτει από τον ανατοκισμό του αρχικού κεφαλαίου δεν προστίθεται στο κεφάλαιο ανά έτος αλλά επιμερίζεται ανά εξάμηνο, τρίμηνα, τετράμηνα ή και μηνιαία. Στην γενική περίπτωση όπου το κεφάλαιο μας μετά από n έτη δεν προστίθεται ανά έτος αλλά σε m περιόδους η σχέση (1) μετατρέπεται στην

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm} \quad (2)$$

Παράδειγμα 1 Ας θεωρήσουμε ένα ιδιώτη οποίος καταθέτει το ποσό των 10.000 ευρώ σε μία τράπεζα με ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο 3%. Να υπολογίσετε το κεφάλαιο του έξι έτη αργότερα όταν α) ο ανατοκισμός είναι ετήσιος β) ο ανατοκισμός είναι μηνιαίος.

Στην πρώτη περίπτωση όπου ο ανατοκισμός είναι ετήσιος χρησιμοποιούμε τον τύπο (1). Με βάση τον τύπο αυτόν έχουμε ότι $K_n = 10000(1+0.03)^6 = 11940.52$

[9] Η σχέση (1) είναι γνωστή ως συνάρτηση συσσωρευμένης μεγέθυνσης (compound growth function). Μάλιστα ο όρος $(1+r)^n$ καλείται συντελεστής κεφαλαιοποίησης ή συντελεστής ανατοκισμού.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου ο ανατοκισμός γίνεται μηνιαία, δηλαδή σε 12 μήνες, το επιτόκιο θα διαιρεθεί δια των 12 μηνών. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον τύπο (2) όπου $K_n = 10000\left(1+\frac{0.03}{12}\right)^{3*12} = 10940.51$. Η διαφορά ανάμεσα στο τελικό κεφάλαιο οφείλεται, προφανώς, στον διαφορετικό τρόπο ανατοκισμού. Πολύ σημαντικό είναι να καταλάβουμε την έννοια του πραγματικού αλλά και του ονομαστικού επιτοκίου. Το ονομαστικό στην περίπτωσή μας είναι το 5% ενώ το πραγματικό είναι αυτό που υπολογίζουμε με μηνιαίο ανατοκισμό. Μάλιστα υπάρχει και σχέση η οποία υπάρχει ανάμεσα στο πραγματικό και στο ονομαστικό επιτόκιο η οποία περιγράφεται η οποία πηγάζει από την σχέση $K_0(1+r)^n = K_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$ και καταλήγει στον εξής τύπο (r το ονομαστικό επιτόκιο):

$$r = \left(1+\frac{r}{m}\right)^n - 1 \quad (3)$$

Ο παραπάνω τύπος (1) δεν χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση υπολογισμού κεφαλαίου αλλά και στην περίπτωση που θέλουμε να περιγράψουμε μια πιο γενική έννοια αυτήν την χρηματοροής. Έστω ότι έχουμε ένα ποσό το οποίο καταβάλλεται ετησίως με επιτόκιο r για t έτη (παραδείγματα υπάρχουν πολλά και αφορούν ασφάλειες, δόσεις σε στεγαστικά δάνεια κ.λ.π). Θα μπορούσαμε με κάποιον τρόπο να υπολογίζαμε την μελλοντική αξία (future value) της χρηματοροής; Μια περιγραφή αυτής γίνεται πολύ απλά μέσω της σχέση $K_n = K_0 + K_0(1+r) + K_0(1+r)^2 + ... + K_0(1+r)^{t-1}$. Προφανώς, η παραπάνω σχέση είναι μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο K_0 και λόγο (1+r). Το άθροισμα αυτής δίνεται ως εξής:

$$FV = K_0\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right)$$

Παράδειγμα 2 Να υπολογίσετε την μελλοντική αξία μιας χρηματοροής 1000 ευρώ για τέσσερα έτη όταν το ετήσιο επιτόκιο είναι 10%.

Με αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο έχουμε ότι $FV = K_0\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right) = 1000\left(\frac{(1+0.1)^4 - 1}{0.1}\right) = 4.641$

Τέλος, στην παρούσα ενότητα θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε και του τύπους της μελλοντικής αξίας ενός ποσού με συνεχή ανατοκισμού ο οποίος δίνεται ως εξής

$K(t)=K_0e^{rt}$ καθώς και την παρούσα αξία με συνεχή ανατοκισμού ποσού Κ πληρωτέου μετά από t έτη η οποία δίνεται ως εξής $K_0=Ke^{-rt}$.

Παρούσα Αξία (Present Value)

Στην παραπάνω ακριβώς ενότητα της Π2.2 ασχοληθήκαμε με την μελλοντική αξία μιας κατάθεσης έχοντας γνώση για το επιτόκιο καθώς και το χρονικό διάστημα αυτής. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με το ακριβώς δυικό πρόβλημα. Δηλαδή την με την παρούσα αξία μιας χρηματοροής (μελλοντικού ποσού). Σημαντική έννοια αποτελεί αυτή της **χρηματοροής** (annuity) η οποία ορίζεται ως μια ακολουθία ισόποσων πληρωμών σε ισαπέχοντα χρονικά διαστήματα. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα όπου ένας καταθέτης επιθυμεί να δεσμεύσεις ένα ποσό κεφαλαίου για 5 χρόνια γνωρίζοντας το επιτόκιο ανατοκισμού 3% προκειμένου στο τέλος της πενταετίας αυτής το αρχικό του κεφάλαιο να έχει γίνει 10.000 ευρώ. Με βάση τον τύπο του ανατοκισμού θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το απαραίτητο κεφάλαιο που πρέπει να δεσμευτεί την παρούσα χρονική στιγμή. Με βάση τον τύπο (1) και λύνοντας ως προς K_0[10] έχουμε ότι $K_0=\frac{K_n}{(1+r)^n}$ όπου με αντικατάσταση

$$K_0=\frac{10000}{(1+0.03)^5}=8826.41$$

Το παραπάνω παράδειγμα αποτελεί μια πρώτη εισαγωγή στον υπολογισμό της παρούσας αξίας μια χρηματοροής. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε την παρούσα αξία 10 πληρωμών. Για τα πέντε πρώτα έτη του ποσού των 1000 ευρώ ενώ για τα επόμενα τέσσερα έτη του ποσού των 2000 ευρώ και για το τελευταίο έτος των 5000 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 4%. Η παρούσα αξία (PV) θα προκύψει από το άθροισμα των παραπάνω ως εξής:

$$PV=PV_1+\ldots+PV_5+PV_6+\ldots+PV_9+PV_{10}=$$
$$=\frac{1000}{(1+0.04)^1}+\ldots+\frac{1000}{(1+0.04)^5}+\frac{2000}{(1+0.04)^6}+\ldots+\frac{2000}{(1+0.04)^9}+\frac{5000}{(1+0.04)^1}$$

Εάν θέλουμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω τύπο για n περιόδους θα έχουμε ο γενικός τύπος της παρούσα αξίας μελλοντικών πληρωμών δίνεται ως εξής:

[10] Το ποσό αυτό καλείται παρούσα αξία προεξόφλησης (present discounted value).

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(1+r)^i} \quad (3)$$

Να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση του πολλαπλού ανατοκισμού ο τύπος (3) μετατρέπεται σε $PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{\left(1+ r/n\right)^{ni}}$.

Παράδειγμα 3 Να υπολογιστεί η παρούσα αξία ενός περιουσιακού στοιχείου που δίνει στον κάτοχό του 100000 ευρώ κάθε έτος για τα επόμενα 10 έτη γνωρίζοντας ότι το επιτόκιο είναι 5%.

Για τον υπολογισμό του παραπάνω θα πρέπει να σκεφτούμε ως εξής. Θα πρέπει να θεωρήσουμε την διαδικασία για την εύρεση της παρούσας αξίας κάθε έτους, αναπτύσσοντας την σχέση (3) από i=1,…,10, ως μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $a = \left(\frac{K_0}{(1+r)} \right)$ και λόγο $\omega = \frac{1}{1+r}$. Συνεπώς θα έχουμε ότι $PV = K_0 \left(\frac{1-\left(1/1+r\right)^n}{r} \right)$. Με αντικατάσταση θα έχουμε ότι

$$PV = K_0 \left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \right) = 100000 \left(\frac{1-(1+0.05)^{-10}}{0.05} \right) = 772.173$$

Η σχέση του πραγματικού και ονομαστικού επιτοκίου μπορεί να περιγραφεί στην ενότητα αυτή. Το πραγματικό ποσοστό με το οποίο ένα ποσό αυξάνει, κατά την διάρκεια ενός έτους, ονομάζεται πραγματικό επιτόκιο. Από την άλλη πλευρά το αντίστοιχο ετήσιο τραπεζικό επιτόκιο ανατοκισμού καλείται ονομαστικό επιτόκιο. Ας θεωρήσουμε ως r_0 το πραγματικό επιτόκιο και r το ονομαστικό. Τότε εάν ο ανατοκισμός γίνεται n φορές το χρόνο η σχέση που τα συνδέει είναι η εξής:

$$r_0 = K_0 \left(1+ \frac{r}{n} \right)^n - 1$$

Δανεισμός

Πολύ σημαντική έννοια, ιδιαίτερα τα τελευταία έτη για την πατρίδα μας, αποτελεί αυτή του δανείου και φυσικά ο τρόπος υπολογισμού του. Το ποσό L_0 για την αποπληρωμή δανείου L σε n δόσεις με επιτόκιο περιόδου[11] r επιλέγεται με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε η παρούσα αξία της χρηματοροής να είναι ίση με το ύψος του δανείου. Πιο συγκεκριμένα,

[11] Θεωρείται το διάστημα μεταξύ δύο δόσεων.

$$\frac{L_0}{r}(1-\frac{1}{(1+r)^n}) = L \Leftrightarrow L_0 = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} L$$

Παράδειγμα 4

Να υπολογιστεί η μηνιαία δόση ενός δανείου ύψος 10000 ευρώ, του οποίου η αποπληρωμή γίνεται σε 10 έτη με επιτόκιο 6%.

Το επιτόκιο μιας περιόδου μπορεί να υπολογιστεί ως $0.5\% = \frac{6}{12}$ ενώ το επιτόκιο μπορεί να δοθεί ως $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$. Με βάση τον παραπάνω τύπο και με απλή αντικατάσταση θα έχουμε ότι:

$$L_0 = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} L = \frac{0.005}{1-(1+0.005)^{-120}} 100000 = 1110.2$$

<u>Ασκήσεις</u>

Π2.1 (a) Να υπολογίσετε την παρούσα αξία προεξόφλησης 30.000 ευρώ σε διάστημα 15 ετών με ετήσιο και μηνιαίο επιτόκιο 4%.

(b) Να υπολογίσετε το κεφάλαιο που θα πρέπει να δανείσει κάποιος προκειμένου να έχει ένα ποσό 10.000 ευρώ σε χρονικό ορίζοντα 8 ετών με επιτόκιο 5%.

Π2.2 Να υπολογίσετε χρησιμοποιώντας την σχέση (3) το πραγματικό επιτόκιο όταν το ονομαστικό επιτόκιο είναι 6% και το κεφάλαιο ανατοκίζεται α) κάθε εξάμηνο β) κάθε μήνα.

Π2.3 Ένας ιδιώτης θέλει να επενδύσει ένα ποσό σε ένα επενδυτικό προϊόν με χρονικό ορίζοντα τεσσάρων ετών. Εξετάζει το ονομαστικό επιτόκιο που του προσφέρουν τρεις τράπεζες που διαθέτουν διαφορετικού τύπους αμοιβαίων κεφαλαίων. Η τράπεζα Α προσφέρει διασφαλισμένο επιτόκιο 10%, η τράπεζα Β 7% και η τράπεζα Γ 8%. Ποια θεωρείται ότι πρέπει να επιλέξει;

Π2.4 Να δειχθεί ότι το επιτόκιο περιόδου με το οποίο το κεφάλαιο K_0 γίνεται K με ανατοκισμό r σε n περιόδους δίνεται από τον τύπο $r = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{1/n} - 1$.

Π2.5 Να αποδειχθούν οι τύποι του συνεχούς και διακριτού ανατοκισμού.

Π2.6 Ένα ποσό κατατίθεται στην τράπεζα και ανατοκίζεται συνεχώς. Μερικά χρόνια μετά το ποσό έχει γίνει 1000 μονάδες και αυξάνεται με ρυθμό 50 μονάδων. Ποιο είναι το επιτόκιο κατάθεσης;

Π2.7 Ένα δάνειο ύψους 200.000 ευρώ αποπληρώνεται με μηνιαίες δόσεις των 720 ευρώ με επιτόκιο (μεσοσταθμικά) 2.9%. Μπορείτε να υπολογίσετε την διάρκεια αποπληρωμής του συγκεκριμένου δανείου;

Π.2.8 Τι ποσό θα πρέπει να καταθέσει κάποιος με ετήσιο επιτόκιο 3% ώστε να εισπράττει 500 ευρώ το εξάμηνο για τα επόμενα 10 έτη;

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας. Για να γίνουν κατανοητές εκτός από τους αντίστοιχους ορισμούς θα ασχοληθούμε και με την γραφική απεικόνιση συναρτήσεων που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις παραπάνω έννοιες. Παράλληλα θα δοθούν αντιπροσωπευτικές ασκήσεις η οποίες εμφανίζονται λυμένες.

Π.3 Όρια συναρτήσεων

Στην οικονομική επιστήμη η έννοια του ορίου είναι συνυφασμένη με οριακές συνήθως παραστάσεις ή όταν ένα σημείο προσεγγίζεται ιδιαίτερα κοντά. Για παράδειγμα, όταν μιλάμε για την μέγιστη δυνατή παραγωγή ενός μηχανήματος ή ενός εργοστασίου ή όταν αναφερόμαστε για το κατώτερο ή ανώτερο όριο στο κόστος ή τα κέρδη τότε μιλάμε επίσης για την έννοια του ορίου.

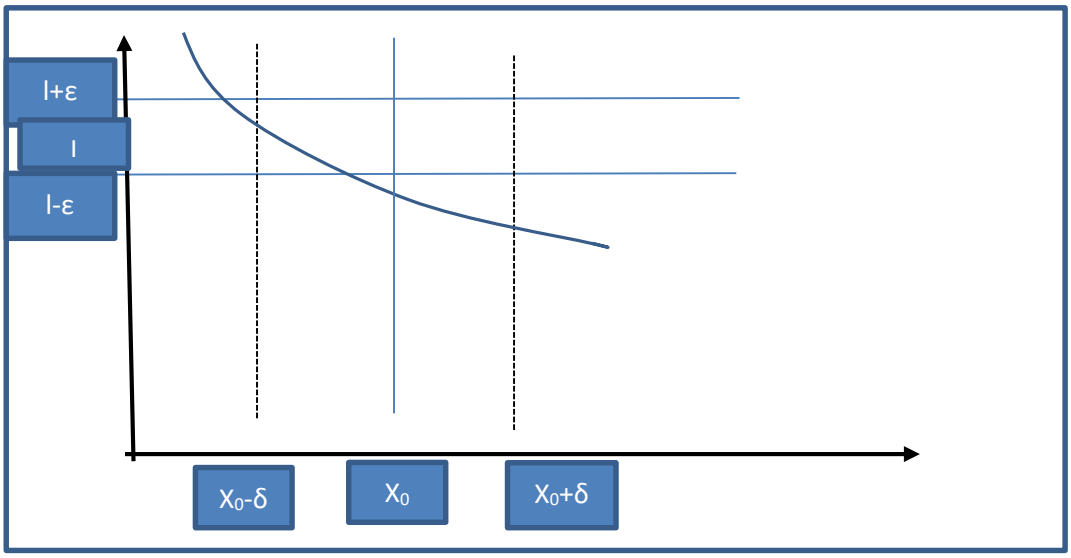
Ωστόσο η μαθηματική του έκφραση και απόδοση απαιτεί ιδιαίτερη ακρίβεια και σαφήνεια. Πιο συγκεκριμένα η έννοια του ορίου αναφέρεται σε μια συνάρτηση f(x) η οποία όταν η μεταβλητή x προσεγγίζει έναν συγκεκριμένο αριθμό του πεδίου ορισμού της αυτή τείνει σε ένα αριθμό l. Είναι κατανοητό ότι ο ορισμός του ορίου απαιτεί μεγαλύτερη σαφήνεια για την συνάρτηση f(x), τον αριθμό που τείνει x, καθώς και τον αριθμό l που αυτή προσεγγίζει.

Με την φράση το όριο μια συνάρτησης f(x) όταν το x τείνει σε ένα πραγματικό αριθμό x_0 ότι είναι ένας πραγματικός αριθμός l εννοούμε ότι καθώς το x προσεγγίζει-πλησιάζει με οποιανδήποτε τρόπο τον πραγματικό αυτόν αριθμό x_0, οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης μας προσεγγίζουν και αυτές τον πραγματικό αριθμό l. Έχει ιδιαίτερο νόημα να τονίσουμε ότι η αναζήτηση του συγκεκριμένου ορίου έχει νόημα μόνο όταν η συνάρτησή μας ορίζεται σε ένα τουλάχιστον διάστημα με άκρο αυτόν το πραγματικό αριθμός x_0. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μας ενδιαφέρουν διαστήματα των μορφών $(k, x_0), (x_0, k)$ ή ένα σύνολο της μορφής $(k, x_0) \cup (x_0, m)$. Συνεπώς το όριο μιας συνάρτησης θα έχει νόημα όταν το σημείο x_0 *είναι τουλάχιστον άκρο ανοικτού διαστήματος που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.* Έχοντας μιλήσει για την έννοια του ορίου προχωρούμε στον αυστηρό μαθηματικό του ορισμό.

Όριο σε πραγματικό αριθμό

Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός του ορίου, όταν το x τείνει σε ένα πραγματικό αριθμός, παρουσιάζεται για μια συνάρτηση f(x): R→ R ως εξής:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ όπου δ,ε και l πραγματικοί αριθμοί. Μάλιστα θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο αριθμός δ εξαρτάται από τον αριθμό ε. Αυτό θα γίνει περισσότερο κατανοητό εάν εφαρμόσουμε το ορισμό για την εύρεση ενός ορίου όπως στο κάτωθι παράδειγμα. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού



Σχήμα 1. Γραφική απεικόνιση ορίου

Παράδειγμα 1. Με βάση τον παραπάνω ορισμό του ορίου να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Με βάση τον ορισμό του ορίου μιας συνάρτησης θα πρέπει $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συγκεκριμένης συνάρτησης να ισχύει ότι $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ και πιο συγκεκριμένα

$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-4|<\varepsilon$. Θα έχουμε συνεπώς ότι $|f(x)-4|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+2-4|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\varepsilon$. Άρα, $\delta \equiv \varepsilon$ [12]

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι το παρακάτω θεώρημα σύμφωνα με το οποίο ένα το όριο μιας πραγματικής συνάρτησης υπάρχει αυτό είναι μοναδικό. Επίσης συνέπεια του ορισμού αποτελεί και η πρόταση.

Πρόταση 1. Εάν τα όρια των πραγματικών συναρτήσεων f,g υπάρχουν τότε μπορούμε να έχουμε τις παρακάτω πράξεις:

1. $\lim_{x\to x_0}(f+g)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$
2. $\lim_{x\to x_0}(fg)=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x)$
3. $\lim_{x\to x_0}(\lambda f+\mu g)=\lambda\lim_{x\to x_0}f(x)+\mu\lim_{x\to x_0}g(x)$
4. Εαν $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0,\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$
5. $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^n$
6. $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim_{x\to x_0}f(x)\right|$
7. Εαν $\forall x\in A, f(x)\geq 0, k\in N^* \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim_{x\to x_0}f(x)}$

Στην συνέχεια παρατίθενται τα παρακάτω όρια τα οποία θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές τους ανάλογα με το που τείνει το x σ ε κάθε περίπτωση[13]. Τα παρακάτω όρια είναι πάρα πολύ σημαντικά για την εύρεση διαφόρων ορίων τα οποία εμπλέκουν συναρτήσεις όπως είναι οι τριγωνομετρικές αλλά και συναρτήσεις όπως η e^x αλλά και ο λογάριθμος.

[12] Παρακαλώ, να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου για τις συναρτήσεις

$$\lim_{x\to 9}f(x)=\sqrt{x}, \lim_{x\to 4}g(x)=\frac{x^2-16}{x-4}, \lim_{x\to 3}h(x)=x^3$$

[13] Καλό θα ήταν να γίνουν οι αποδείξεις. Παρακαλούνται οι φοιτητές όπως σκεφτούν περιπτώσεις που περιλαμβάνουν πιο ανεπτυγμένες μορφές.

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi x}{x}=1$$

$$3.\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$4.\lim_{x\to 0}(\frac{e^{x}-1}{x})=1$$

$$5.\lim_{x\to 1}(\frac{\ln x-1}{x})=1$$

$$6.\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}-1}{x}=a, a\in R^{*}, -1\le x\ne 0$$

Χρησιμοποιώντας την έννοια του ορίου σε έναν πραγματικό αριθμό, τις ιδιότητες που ισχύουν αλλά και τις ειδικές περιπτώσεις που αναφέραμε θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε ορισμένες περιπτώσεις που αφορούν την εύρεση ορίων πολυωνυμικών συναρτήσεων, ρητών συναρτήσεων και συναρτήσεων που εμπλέκουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, λογαριθμικές και εκθετικές μορφές.

Παράδειγμα 2

Δίνεται η συνάρτηση , $h(x)=\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$ Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο 1.

Μετά τις απαραίτητες παραγοντοποιήσεις (σχήμα Horner, χρήση ταυτοτήτων κ.λ.π.) έχουμε ότι $h(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)^3(x-2)}=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ με $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Άρα θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}x=+\infty$.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}}$ Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης όταν το x τείνει στο -1.

Για την λύση ασκήσεων που περιέχουν ρίζες εργαζόμαστε αρκετές φορές χρησιμοποιώντας την συζυγή παράσταση. Άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με $\sqrt{x+5}+2$, $\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}$. Κάνοντας τις

ανάλογες πράξεις έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{x+5}-2\right)\left(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}-\sqrt{x+10}\right)\left(\sqrt{x+5}+2\right)\left(\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}\right)} = .$$

Κάνοντας τις πράξεις

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}\left(x+5-4\right)}{(x^2-x-2)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}\left(x+1\right)}{(x^2-x-2)(\sqrt{x+5}+2)} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)(x-2)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}}{(x-2)(\sqrt{x+5}+2)} = -1/2$$

.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x}$.

όταν το x τείνει στο μηδέν. Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f = R^*$. Άρα το όριο της συνάρτησης θα υπολογιστεί ως εξής:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{a^{3x}-1}{\ln(2x+1)}, 0 < a \neq 1$ [14] όταν το x τείνει στο μηδέν. Θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{3x}-1}{\ln(2x+1)} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{3x\ln a}-1}{3x\ln a} \frac{3x\ln a}{\ln(1+2x)} \right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{3x\ln a}-1}{3x\ln a} \frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{(1+2x)-1}\bullet 2} 3\ln a \right] =$$

$$= 1\frac{1}{1\bullet 2} 3\ln a = \ln\sqrt{a^3}$$

[14] Παρακαλώ δείτε λίγο προσεκτικά τις περιπτώσεις των συγκεκριμένων ορίων τα οποία τα όρια δίνονται απευθείας.

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln(\sin 3x+1)}{x}$ όταν το x τείνει στο μηδέν.

Θα έχουμε ότι

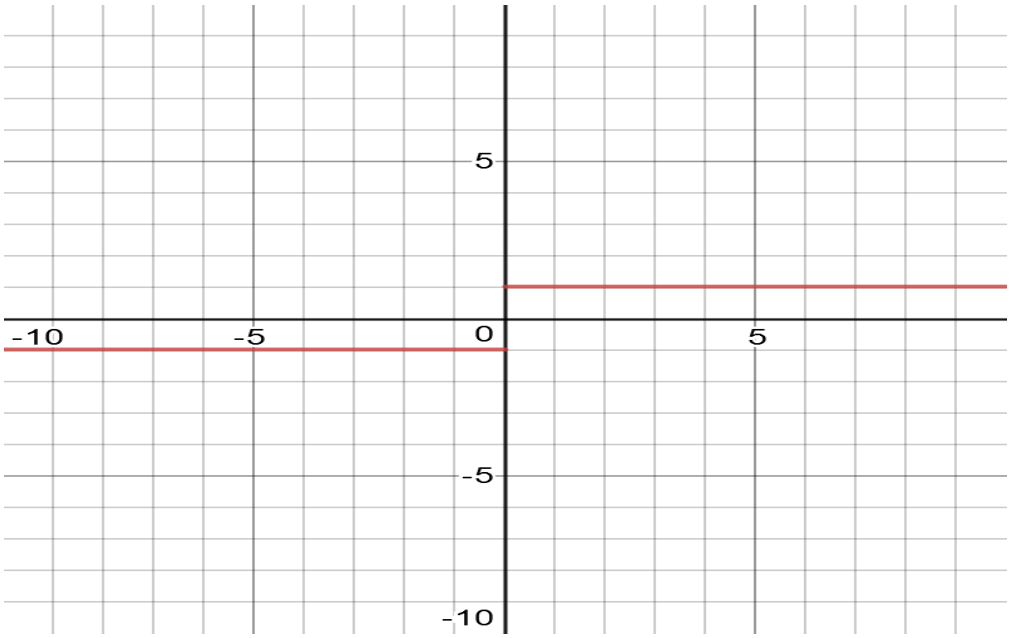
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 3x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(\sin 3x+1)}{(\sin 3x+1)-1}\frac{\sin 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 3x+1)}{(\sin 3x+1)-1}\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής και θέτοντας $\sin 3x+1=y, 3x=w$

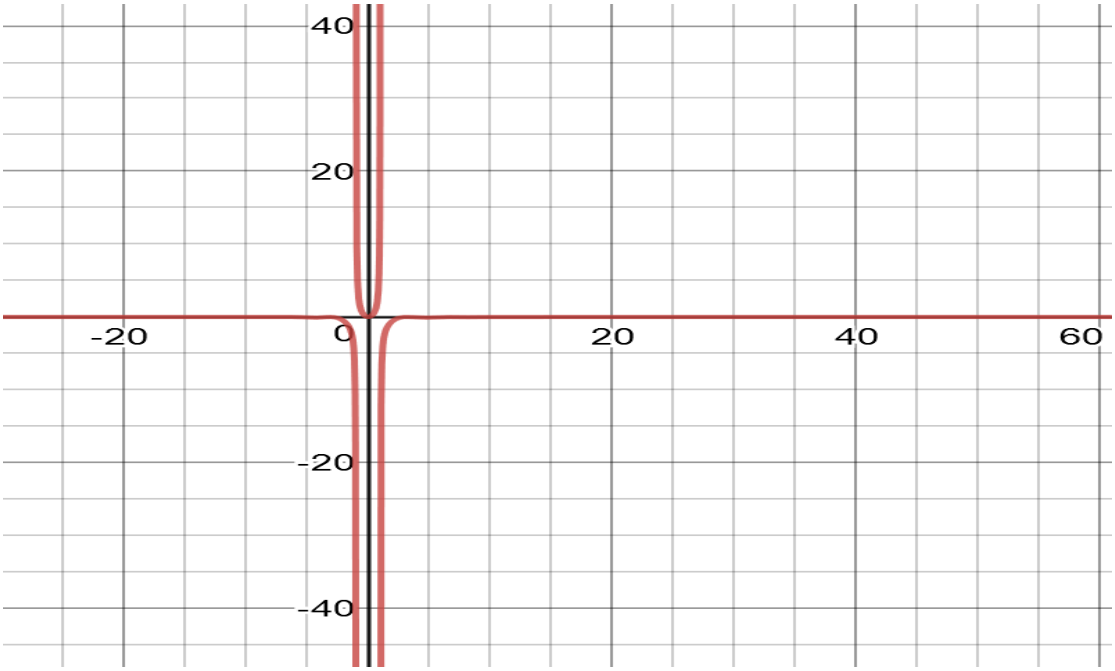
$$3\lim_{y\to 1}\frac{\ln(y)}{y-1}\lim_{w\to 0}\frac{\sin w}{w}=3\bullet 1\bullet 1=3$$

Πλευρικά όρια

Ωστόσο θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αρκετές συναρτήσεις προς μελέτη δεν παρουσιάζουν την μορφή των παραπάνω συναρτήσεων. Για παράδειγμα θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x}{|x|}, g(x)=\dfrac{\cos 2x-1}{x^2-x}$ με τις ακόλουθες γραφικές τους παραστάσεις



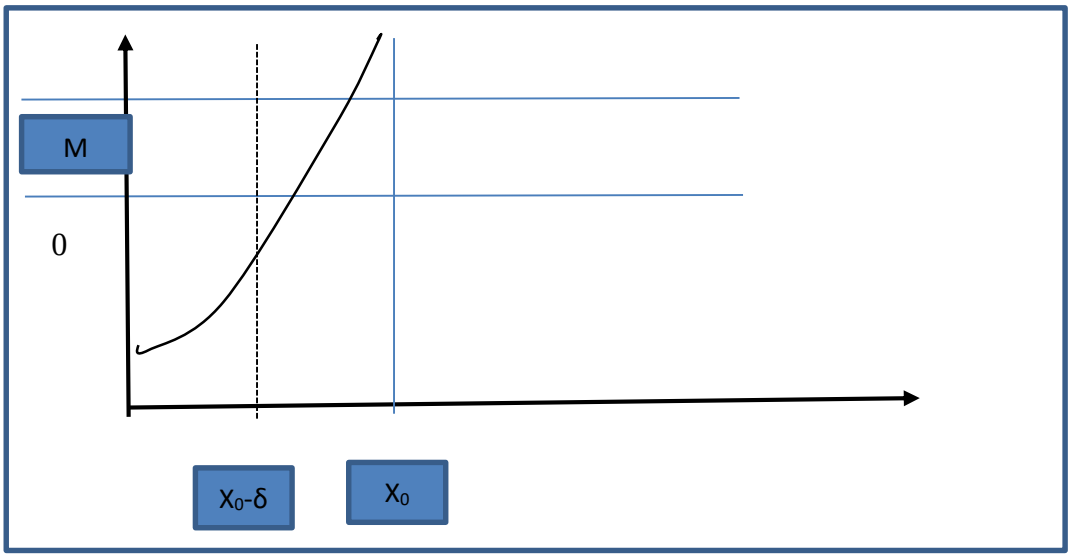
Σχήμα 2. Γραφική απεικόνιση της $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$



Σχήμα 3. Γραφική απεικόνιση της $g(x)=\dfrac{\cos 2x-1}{x^2-x}$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το σχήμα 2 όταν το χ τείνει στο μηδέν από αρνητικούς αριθμούς τότε η συνάρτηση έχει όριο το -1. Από την άλλη πλευρά όταν τείνει στο μηδέν από θετικούς αριθμούς έχει όριο το 1 οπότε η συνάρτησή μας έχει αριστερό και δεξί όριο. Ανάλογη συμπεριφορά παρουσιάζει και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\cos 2x-1}{x^2-x}$ με επίμαχα σημεία τα 0 και 1.

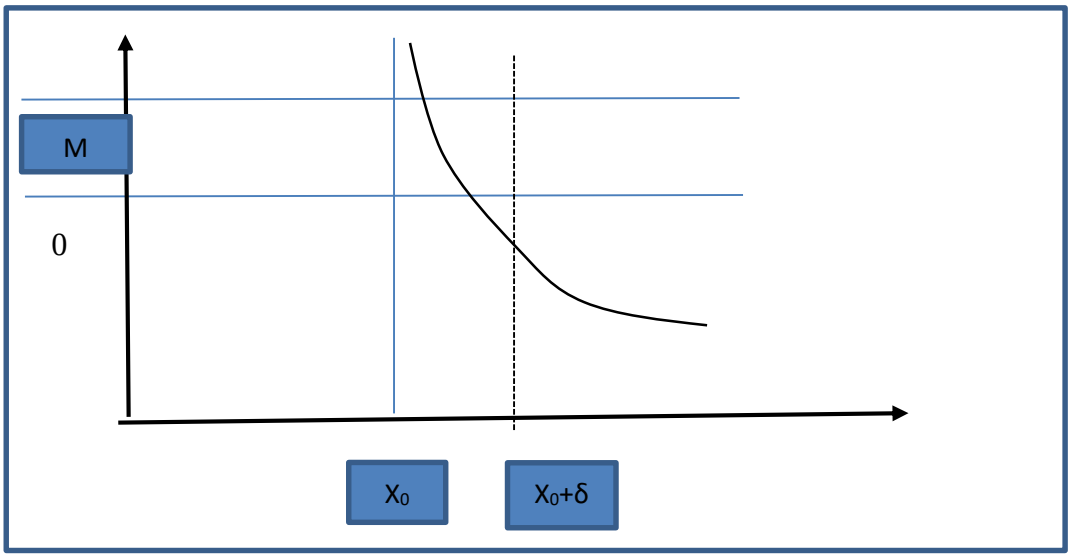
Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, μια συνάρτηση $f:A\to R$ με πεδίο ορισμού $D_f=\left(x_0-h,x_0\right)$. Το από αριστερά πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 συμβολίζεται ως $\lim\limits_{x\to x_o^-}$ και ορίζεται ως εξής $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l,\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:0<\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$. Το παρακάτω σχήμα 2 αποτυπώνει την γραφική απεικόνιση του ορίου.



Σχήμα 4. Γραφική απεικόνιση πλευρικού ορίου (αριστερά)

Ενεργώντας με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να ορίσουμε και το όριο από τα δεξιά για την ίδια συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : A \to R$ με πεδίο ορισμού $D_f = (x_0, x_0 + h)$. Το από δεξιά πλευρικό όριο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 συμβολίζεται ως $\lim_{x \to x_0^+}$ και ορίζεται ως εξής

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Η γραφική του απεικόνιση δίνεται στο παρακάτω σχήμα 5.



Σχήμα 5. Γραφική απεικόνιση πλευρικού ορίου (δεξιά)

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$. Με βάση το παραπάνω πεδίο ορισμού το όριο της συνάρτησης θα πρέπει να εξεταστεί στα σημεία -3 και +3. Ωστόσο, σημαντικό ρόλο παίζει και ο αριθμητής. Η δευτεροβάθμια εξίσωση στον αριθμητή μπορεί να αναλυθεί με βάση τις ρίζες που έχεις ως εξής: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$. Άρα η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{(x-2)}{(x+3)}$ οπότε το όριο προς εξέταση είναι το -3 και είναι πλευρικό.

Έχουμε συνεπώς $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-2)}{(x+3)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{(x+3)}(x-2)$ (I). Επίσης,

$$\lim_{x\to-3^+}(x+3)=0,(x+3>0)\Rightarrow\lim_{x\to-3^+}\frac{1}{(x+3)}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-3^+}\frac{1}{(x+3)}(x-2)=-\infty \text{ (II)}$$

Και

$$\lim_{x\to-3^-}(x+3)=0,(x+3<0)\Rightarrow\lim_{x\to-3^-}\frac{1}{(x+3)}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to-3^-}\frac{1}{(x+3)}(x-2)=+\infty \text{ (III)}$$

Με βάση τις (II) και (III) έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο στον πραγματικό αριθμό -3 καθώς τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-3+\left|x^2-4x+3\right|}{x-3}$

Το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$. Συνεπώς η συνάρτησή μας που αποτελείται από το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων θα πρέπει να εξεταστεί για το όριό της στο σημείο 3. Ωστόσο σημαντικό ρόλο παίζει και η ύπαρξη του απολύτου καθώς και της δευτεροβάθμιας ρίζας που υπάρχει μέσα σε αυτό. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στο παρακάτω πίνακα

	$-\infty$	*1*	*3*	∞
x^2-4x+3	+	-	+	

Πίνακας 1. Πρόσημο τριωνύμου x^2-4x+3

Με βάση τον παραπάνω πίνακα για το πρόσημο του τριωνύμου διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Εάν $x \in (-\infty,1] \cup (3,+\infty)$ τότε $|x^2-4x+3| = x^2-4x+3$ και η f(x) γίνεται

$$f(x) = \frac{x-3+x^2-4x+3}{x-3} = \frac{x^2-3x}{x-3} = x \ .$$

2. Εάν $x \in (1,3)$ τότε $|x^2-4x+3| = -(x^2-4x+3)$ και η f(x) γίνεται

$$f(x) = \frac{x-3-x^2+4x-3}{x-3} = -x+2 \ .$$

Ουσιαστικά πρόκειται για μια συνάρτηση με δύο κλάδους. Άρα το όριο στο σημείο 3 θα αναζητηθεί μέσω των πλευρικών ορίων. Συνεπώς θα έχουμε,

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} x = 3 \text{ (I)}$$

και

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (-x+2) = -1 \text{ (II)}$$

Με βάση τις (I) και (II) έχουμε ότι δεν υπάρχει το όριο στον πραγματικό αριθμό -3 καθώς τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα.

Ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα αποτελεί το **κριτήριο της παρεμβολής** το οποίο αποδεικνύεται με την βοήθεια του ορισμού αλλά είναι χρήσιμο για την εύρεση ορίου σε αρκετές περιπτώσεις.

Θεώρημα. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις h(x),f(x) και g(x) οι οποίες παίρνουν τιμές κοντά στο x_0 και ισχύει ότι $h(x) \le f(x) \le g(x)$. Εάν ισχύει ότι οι τιμές του ορίου και για τις δύο συναρτήσεις h(x) και g(x) ισούται με έναν πραγματικό αριθμός δηλαδή $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ τότε και το όριο της f(x) είναι ο ίδιος πραγματικός αριθμός l όταν το x θα τείνει x_0 στο $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

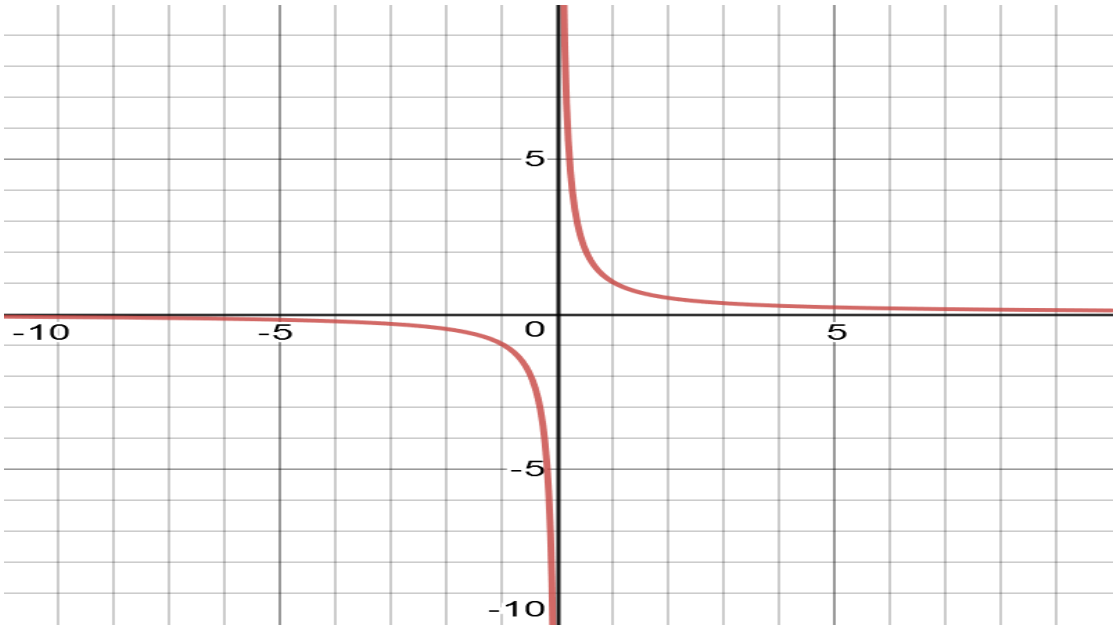
Παράδειγμα 1. Να δειχθεί ότι το όριο της συνάρτησης $\lim_{x \to 0}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^3} \right) = l$ όταν το x τείνει στο μηδέν ισούται με μηδέν.

Ως γνωστόν το ημίτονο ενός πραγματικού αριθμού φράσσεται από τους αριθμούς -1 και 1. Συνεπώς θα έχουμε ότι $\left|\sin\frac{1}{x^3}\right| \le 1$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού

της που είναι το R.Θα συνεπάγεται ότι $\left|x^2 \sin\frac{1}{x^3}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|x^2\right|\left|\sin\frac{1}{x^3}\right| \le x^2$. Οπότε, $-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x^3} \le x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της παρεμβολής και υπολογίζοντας τα παρακάτω όρια $\lim_{x\to 0} -x^2, \lim_{x\to 0} x^2$ έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0, \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x^2 \sin\frac{1}{x^3}\right) = 0$.

Όριο στο άπειρο

Μια συνάρτηση f(x) θα λέμε ότι έχει στο x_0 όριο το $+\infty$ εάν καθώς το x τείνει στο x_0 η τιμή της συνάρτησης f(x) γίνεται πολύ μεγάλη. Αντίστοιχα μια συνάρτηση f(x) θα λέμε ότι έχει στο x_0 όριο το $-\infty$ εάν καθώς το x τείνει στο x_0 η τιμή της συνάρτησης f(x) γίνεται πολύ μικρή. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση f(x)=1/x.



Σχήμα 6. Γραφική Παράσταση της 1/x

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε καθώς το x μας τείνει στο $-\infty$ η συνάρτησή μας λαμβάνει τιμές που συνεχώς αυξάνουν και τείνουν και πάλι στο μηδέν. Αντίθετα όταν το x τείνει στο $+\infty$ η συνάρτηση λαμβάνει τιμές που συνεχώς φθίνουν και τείνουν στο μηδέν.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε στους παρακάτω ορισμούς:

a) Μια συνάρτηση f θα συγκλίνει στο όριο l καθώς το x τείνει στο $+\infty$ και θα γράφουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ όταν $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε x>δ να ισχύει ότι $|f(x)-l|<\varepsilon$. Αντίστοιχα,

b) Μια συνάρτηση f θα συγκλίνει στο όριο l καθώς το x τείνει στο $-\infty$ και θα γράφουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ όταν $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ τέτοιο ώστε x<-δ να ισχύει ότι $|f(x)-l|<\varepsilon$ [15].

Εάν υπάρχουν και ορίζονται τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=l$ και $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=m$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$1.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=l+m$$
$$2.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=l-m$$
$$3.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)g(x)\right]=lm$$
$$4.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[kf(x)+ng(x)\right]=kl+nm$$
$$5.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)/g(x)\right]=l/m$$
$$6.\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)\right]^n=l^n$$

Τέλος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τα παρακάτω για τον υπολογισμού ενός ορίου που τείνει στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα,

1. Το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης ισούται με το όριο του μεγιστοβάθμιο όρου της.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1x_1+a_0)=\pm\lim_{x\to\pm\infty}a_\nu x^\nu$$

Μάλιστα,

$$\lim_{x\to+\infty}(a_\nu x^\nu)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } a_\nu>0\\ -\infty, & \text{αν } a_\nu<0\end{cases}$$

2. Το όριο μιας ρητής συνάρτησης ισούται με το όριο του πηλίκου των μεγιστοβάθμιων όρων του αριθμητή και παρανομαστή.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1x_1+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x_1+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_\nu x^\nu}{b_mx^m}=\frac{a_\nu}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}x^{\nu-m}$$

[15] Θα μπορούσατε με την βοήθεια του ορισμού να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης 1/x.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+4}$.

Διαιρώντας τον αριθμητή καθώς και τον παρανομαστή με x^2 έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3\not{x^2}}{x^2+4\not{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορίου $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}=\dfrac{2-0+0}{1+0}=2$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το όριο της $f(x)=\dfrac{(a-2)x^2+4x+1}{(a+3)x+2}$ όταν $x\to+\infty$.

Στην πρώτη περίπτωση εξετάζουμε εάν $a\neq 2,-3$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)x^2+4x+1}{(a+3)x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-2)}{(a+3)}x=\begin{cases}+\infty,\alpha\nu\ \alpha\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)\\-\infty,\alpha\nu\ \alpha\in(-3,2)\end{cases}$$

Στην δεύτερη περίπτωση εάν α=2 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+4x+1}{5x+2}=\dfrac{4}{5}$. Τέλος στην τρίτη περίπτωση όπου α=-3 θα έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x^2+4x+1}{2}=-\infty$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\left[\dfrac{2x-1}{2x+3}\right]^{x+2\not{3}}$.

Το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης είναι $D_f=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right]$. Επίσης έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x-1}{2x+3}\right]=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{3}=+\infty$. Με τις κατάλληλες πράξεις θα έχουμε ότι:

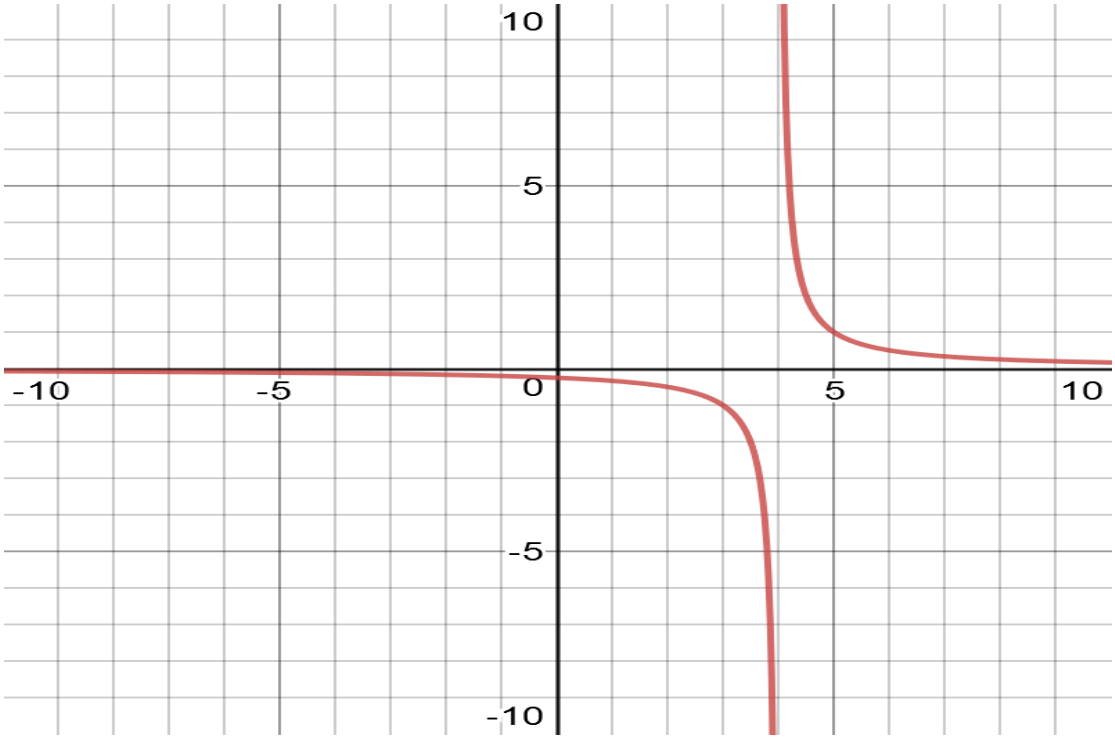
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-1}{2x+3}\right]^{x+2/3}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{-4}{2x+3}\right]^{x+2/3}=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2x+3/4}\right]^{x+2/3}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{-(2x+3)/4}\right]^{\frac{-1}{4(2x+3)}}\right\}^{\frac{-4(x+2)}{3(2x+3)}}=\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{-(2x+3)/4}\right]^{\frac{-1}{4(2x+3)}}\right\}^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-4(x+2)}{3(2x+3)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

Όρια στο άπειρο

Ας εξετάσουμε τώρα την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x-4}$



Σχήμα 6. Γραφική Παράσταση της 1/(x-4)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε γύρω από τον αριθμό 4 η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν ορίζεται και μάλιστα η συμπεριφορά της εμφανίζεται να είναι λίγο "περίεργη". Πιο συγκεκριμένα όταν το x πλησιάζει στον αριθμό 4 από μεγαλύτερους αριθμούς, δηλαδή όταν $x\to 4^+$, η συνάρτηση μας τείνει στο $+\infty$. Αντίστοιχα όταν το x πλησιάζει στον αριθμό 4 από μικρότερους αριθμούς, δηλαδή όταν $x\to 4^-$,

παρατηρούμε ότι η συνάρτησή μας τείνει στο $-\infty$. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

1. Η συνάρτηση f θα απειρίζεται θετικά, $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,καθώς το x θα τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό έστω x_0 εάν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησή της με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $f(x) > 1/\varepsilon$. Αντίστοιχα,

2. Η συνάρτηση f θα απειρίζεται αρνητικά, $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ καθώς το x θα τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό έστω x_0 εάν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τέτοιο για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησή της με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $f(x) < -1/\varepsilon$.

Σημαντική σημείωση

Εάν κατά τον υπολογισμό ενός ορίου μιας συγκεκριμένη συνάρτησης είτε το όριο τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό είστε στο άπειρο προκύψει μια από τις ακόλουθες μορφές τότε μιλάμε **για απροσδιόριστη μορφή**.

$$1.\frac{0}{0}, 2.\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 3.(+\infty)+(-\infty), 4.(+\infty)-(-\infty),$$
$$5.(-\infty)-(-\infty), 6.1^{\pm\infty}, 7.0^{\pm\infty}, 8.(\pm\infty)^0$$

Βασικός κανόνας εδώ είναι η προσπάθεια μετασχηματισμού της συνάρτησής προς υπολογισμού. Ωστόσο σημαντική βοήθεια θα μας προσφέρει αργότερα και ο κανόνας De'Hospital ο οποίος αναπτύσσεται στο κεφάλαιο των παραγώγων.

Ασκήσεις

Π.3.1 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x+10}}{(x-2)(\sqrt{x+5}+2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2|x-3|+5|1-x|-10}{(x^2-9)}$

3. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}{x-64}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$

Π.3.2 Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια εάν αυτά υπάρχουν

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+x\sin x}{(x^2-3x+1)}$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{1+3x^2}}{x^3-2x}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x+\sqrt{1+x^2}$

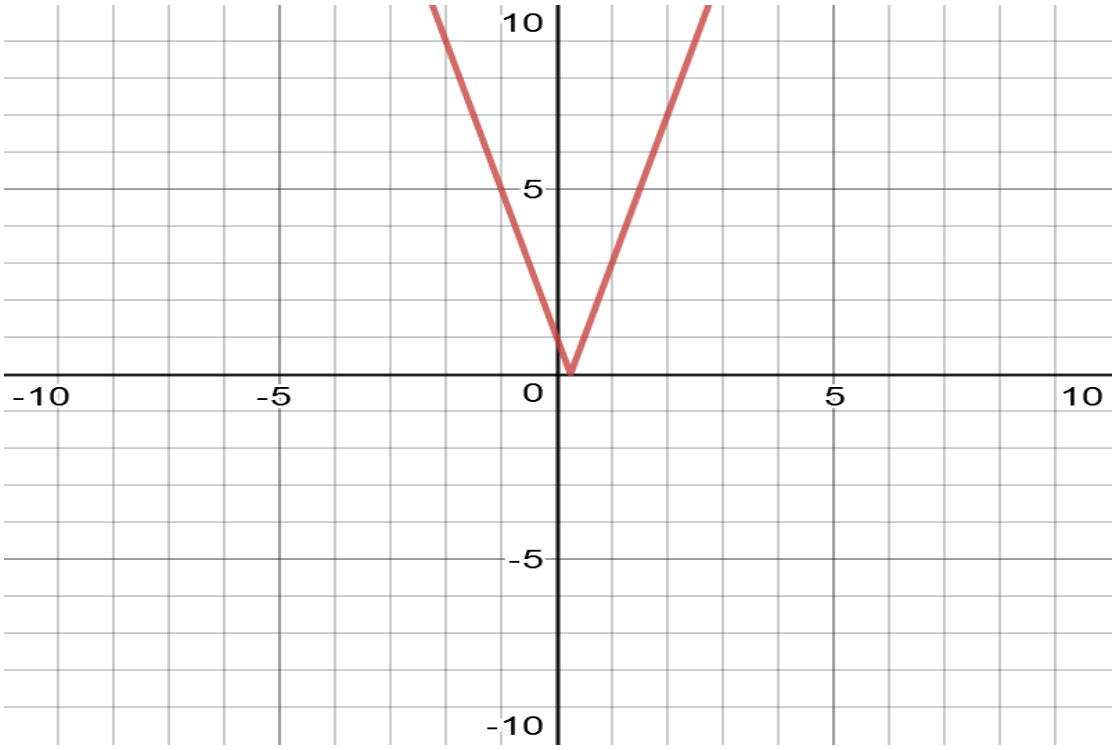
Π.3.3 Με βάση το ορισμό του ορίου να δείξετε ότι το όριο της συνάρτησης $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$ είναι το $+\infty$

Π.3.4

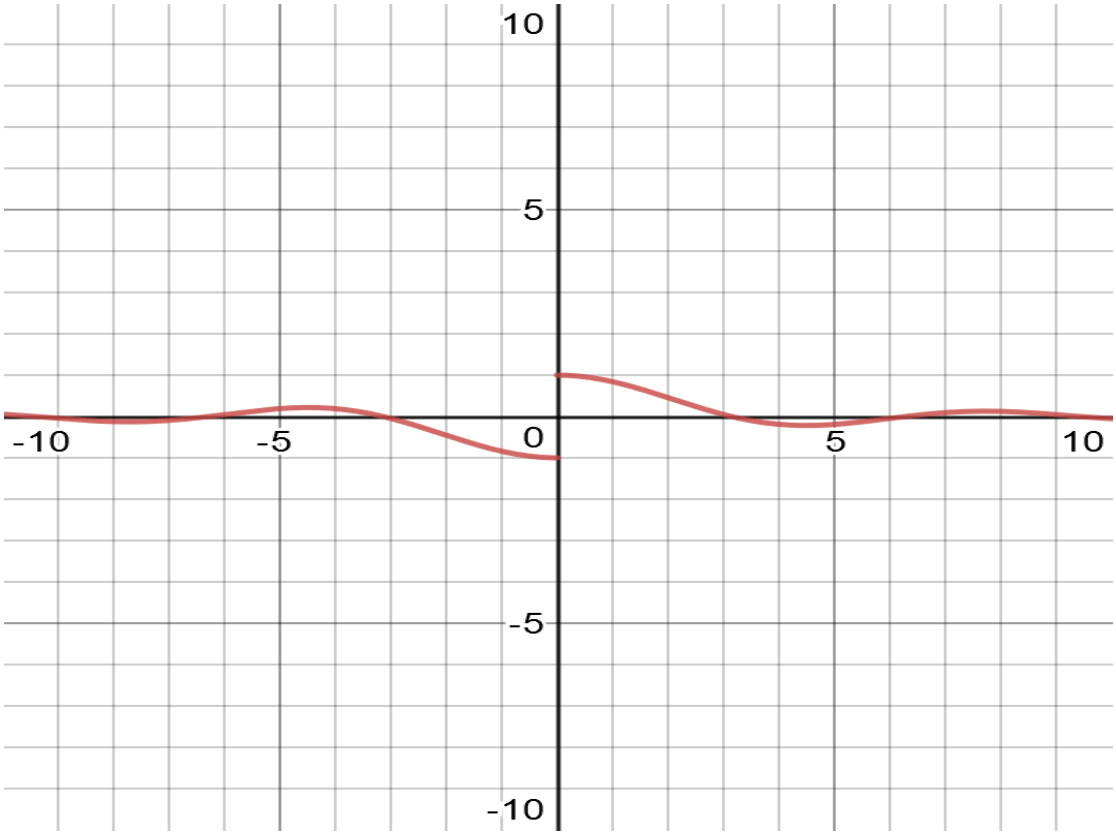
Π.4 Συνέχεια συναρτήσεων

Η συνέχεια συναρτήσεων αποτελεί μια έννοια η οποία βασίζεται στην έννοια του ορίου. Η παλιότερη έκφραση στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης «… το μολύβι να μην σηκώνεται από το χαρτί» αποτελεί ένα απλό, διαισθητικό αλλά και κατανοητό τρόπο για την αποτύπωση της συγκεκριμένης έννοιας. Ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|1-4x|, g(x)=\dfrac{\sin|x|}{x}$. Με βάση τις γραφικές τους παραστάσεις στα σχήματα 7 και 8 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=|1-4x|$ θα πρέπει να εξεταστεί διεξοδικότερα για την συνέχειά της

στο σημείο ¼. Από την άλλη πλευρά η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\sin|x|}{x}$ παρουσιάζει "διακοπές" στην γραφική της παράσταση υποδηλώνοντας σημεία **ασυνέχειας**.



Σχήμα 7. Γραφική παράσταση της $f(x)=|1-4x|$.



Σχήμα 8. Γραφική παράσταση της $g(x)=\dfrac{\sin|x|}{x}$.

Έστω μια συνάρτηση $f(x):A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}$ ΤΥΠΟ. Η συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο σημείο p του A εάν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$: ΤΥΠΟ. Για να είναι συνεχής μια συνάρτηση στο σημείο p του πεδίου ορισμού της θα πρέπει να ισχύουν:

1.Να υπάρχει το όριο της f(x) στο x_0,

2.Το όριο να ισούται με την τιμή της παράστασης

3. Προφανώς να υπάρχει το $f(x_0)$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός που ισχύει μας λέει ότι μια συνάρτηση θα είναι συνεχής όταν $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και την πλευρική συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, μια συνάρτηση f(x) θα καλείται συνεχής από αριστερά στο σημείο x_0 εάν και μόνο εάν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$: ΤΥΠΟ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$: ΤΥΠΟ. Ομοίως μια συνάρτηση f(x) θα καλείται συνεχής από δεξιά στο σημείο x_0 εάν και μόνο εάν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$: ΤΥΠΟ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$: ΤΥΠΟ. Προφανώς η συνάρτηση f θα είναι συνεχής εάν είναι συνεχής από δεξιά και αριστερά.

Επίσης, μια συνάρτηση συνεχής σε κάθε σημείο του π.ο Α θα λέμε ότι είναι συνεχής σε όλο το Α. Μάλιστα μπορούμε να τονίσουμε και τις παρακάτω ιδιότητες:

1) Το άθροισμα ή η διαφορά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.
2) Το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης με πραγματικό αριθμό ή συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση
3) Το πηλίκο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση
4) Η απόλυτη τιμή και η δύναμη μια συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής.
5) Οι συναρτήσεις sinx, cosx, logx,e^x είναι συνεχείς συναρτήσεις
6) Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι και αυτή συνεχής συνάρτηση.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0\\ \ln(x+3), -3<x\le 0\end{cases}$

Για κάθε x>0 η συνάρτησή μας είναι συνεχής γιατί και οι συναρτήσεις $3^x-1, \ln(x+1)$ είναι συνεχείς οπότε και το πηλίκο τους θα είναι συνεχής συνάρτηση. Στην περίπτωση τώρα που το $x\in(-3,0)$ η συνάρτηση $\ln(x+3)$ είναι και αυτή συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Άρα, το σημείο που θα πρέπει να εξετάσουμε διεξοδικότερα είναι το μηδέν. Για να είναι συνεχής με βάση τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\equiv \ln 3$. Ισχύει όμως ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\ln(x+3))=\ln 3$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3^x-1}{x\ln(3)}\frac{x}{\ln(x+1)}\ln 3=$$

Εξετάζουμε λοιπόν το $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln(3)}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)-1}}\ln 3$

Με τις κατάλληλες αλλαγές μεταβλητών $y=x\ln(3), x+1=w$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln(3)}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)-1}}\ln 3=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\lim_{w\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln(w)}{w-1}}\ln 3=\ln 3$$

Άρα, η συνάρτησή μας είναι συνεχής καθώς $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\ln 3$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k έτσι ώστε η παρακάτω συνάρτηση g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}, x\neq 2,3\\ -\ln|k-2|, x=2\end{cases}$

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση g στο πεδίο ορισμού της θα πρέπει να είναι στο σημείο 2 καθώς η συνάρτηση είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων ενώ το σημείο 3 δεν μας ενδιαφέρει. Άρα, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Επειδή ισχύει ότι $f(2)=-\ln|k-2|$ θα πρέπει να υπολογίσουμε το:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos^2(x-2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sin^2(x-2)}{(x-2)^2}\frac{1}{(x-3)}=\left[\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{(x-2)}\right]^2\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-3)}=$$

$$=1(-1)=1$$

Άρα $-\ln|k-2|=-1\Leftrightarrow|k-2|=e\Leftrightarrow k=2\pm e$

Η έννοια της συνέχειας επεκτείνεται και σε κλειστό διάστημα και αναφέρεται στην ύπαρξη ριζών (μοναδικών ή και μη) καθώς και στην ύπαρξη μέγιστων ή ελάχιστων τιμών. Τα βασικά ερωτήματα που αναφέρονται στο παρόν παράρτημα έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια απλή αναφορά στα συγκεκριμένα θεωρήματα και δεν αποσκοπούν σε μια ενδελεχή μελέτη τους. Συνίσταται στους φοιτητές να επιχειρήσουν να κατανοήσουν και την γεωμετρική τους διάσταση και να τα εντάξουν σε ένα γενικότερο πλαίσιο μελέτης μιας οικονομικής συνάρτησης.

Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Εάν η f(x) είναι συνεχής στο [α,β]→R τότε:

1. Η f(x) παίρνει μια μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο [α,β] . Με απλά λόγια υπάρχει αριθμός M>0 τέτοιος ώστε η συνάρτησή μας να είναι φραγμένη. Το θεώρημα αυτό καλείται **μεγίστης-ελαχίστης** τιμής ή θεώρημα **Weierstrass.**

2. Εάν οι τιμές f(α) και f(β) είναι ετερόσημες τότε υπάρχει δ στο [α,β]:f(δ)=0. Το θεώρημα που ικανοποιεί τα παραπάνω είναι το πασίγνωστο θεώρημα του **Bolzano**.
3. Εάν τώρα υπάρχει αριθμός λ μεταξύ των α,β τότε υπάρχει σημείο δ στο [α,β]:f(δ)=λ. Δηλαδή η συνάρτησή μας λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των f(a) και f(b) αναφερόμενοι λοιπόν στο θεώρημα **ενδιάμεσης τιμής**.

Παράδειγμα 3

Να εξετάσετε εάν η εξίσωση $x^5-18x+2=0$ έχει μια ρίζα στο διάστημα (-1,1). Η συνάρτηση $x^5-18x+2=0$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο [-1,1] και έχουμε ότι f(-1)=19 και f(1)=-15. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ έτσι ώστε $f(x_0)=0$. Άρα η εξίσωσή μας έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-1,1).

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{x^3}{3}-2\cos\frac{\pi x}{3}+4$ λαμβάνει την τιμή 5 όταν το $x_0\in[-2,2]$. Η συνάρτησή μας είναι συνεχής ως άθροισμα πολυωνυμικών στο [-2,2]. Επίσης f(-2)=3 και f(2)=7. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών επειδή 3<5<7 υπάρχει $x_0\in[-2,2]$ έτσι ώστε $f(x_0)=5$.

Ασκήσεις

Π4.1 Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο [-1,3], με f([-1,3])=(0,4).Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής ή όχι. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Π4.2Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η σύνθεση των συναρτήσεων fog με

$f(x)=2x^2$ και $g(x)=\begin{cases}2x-1, x\geq 0\\ 2x+1, x<0\end{cases}$

Π4.3 Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε η παρακάτω συνάρτηση f να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}, x<0\\ \alpha+\beta\sin x, 0\le x\le \pi/2\\ \dfrac{\cos x}{\sin x(\pi-2x)}, x>\pi/2\end{cases}$$

Π4.4 Να εξετάσετε εάν η παρακάτω συνάρτηση $f(x)=1-x+\cos 2x$ έχει πραγματική ρίζα.

Γενικές Ασκήσεις Παραρτήματος

Π1-1 Μια ασφαλιστική εταιρεία αμείβει του υπαλλήλους της με καθαρό μηνιαίο μισθό 1000 ευρώ συν προμήθεια 15% επί της αξίας των συμβολαίων συν ένα πριμ αποδοτικότητας 600 ευρώ ανά μήνα εάν ξεπεράσει τις 15000 ευρώ. Θεωρείται ότι είναι συνεχής η συγκεκριμένη συνάρτηση;

Π1-2

Η κυβέρνηση φορολογεί το εισόδημα κάθε φορολογούμενου με συντελεστή 30% για ετήσιο εισόδημα μεγαλύτερο των 25000 Ευρώ. Για να αυξήσει τα έσοδα από τη φορολογία χωρίς να επιβαρύνει τους οικονομικά ασθενέστερους, η κυβέρνηση σκέπτεται να επιβάλει πρόσθετη φορολογία ίση με 2000 Ευρώ για όσους έχουν ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 40000 Ευρώ. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση από την οποία προκύπτει το καθαρό εισόδημα κάθε φορολογούμενου, μετά την καταβολή του φόρου. Τι επιπτώσεις αναμένεται να έχει η επιβολή της πρόσθετης φορολογίας σε όσους έχουν υψηλά εισοδήματα;

Π1-3 Δίνονται η συνάρτηση ζήτησης **D(p)** και η συνάρτηση προσφοράς **S(p)** ενός προϊόντος: $D(P)=\begin{cases}50-P, P>30\\70-P, P\leq 30\end{cases}$, $S(P)=-12+P$. Υπάρχει σημείο ισορροπίας στην αγορά του προϊόντος; Τι παρατηρείται;

Π1-4 Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε η παρακάτω συνάρτηση f να είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-x+\beta, x\leq -1\\1, x=-1\\\beta x^2+\alpha x-1, x>-1\end{cases}$$

Π1-5 Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$1.\ f(x)=\begin{cases}3x^2+5, x\le -1\\ x+9, -1\le x\le 3\\ x^2+x+1, x>3\end{cases}$$

$$2.g(x)=\frac{x}{1+\left(2\sin x\right)^{2n}}, n\to\infty$$

$$3.h(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, x<0\\ 0, x=0\\ \frac{x-\sin x}{x}, x>0\end{cases}$$

Π1-6 Δίνεται η συνάρτηση $D(Q)=\begin{cases}Q^3, -1\le Q\le 2\\ 5-Q, 2<Q\le 4\end{cases}$. Δείξτε ότι για την συγκεκριμένη συνάρτηση δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο διάστημα [-1,4] και όμως αυτή μηδενίζεται στο (-1,4). Εξηγήστε το γιατί.