Μάθημα Δεύτερης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 12/10/2020 & Τρίτη 13/10/2020

Άσκηση 1

Μια επιχείρηση έχει 400 πελάτες από τους οποίους 285 αγοράζουν το προϊόν Α, 210 αγοράζουν το προϊόν Β από τους οποίους 127 αγοράζουν και το Α. Ζητούνται α) ο αριθμός των πελατών που αγοράζουν μόνο το Α, β) ο αριθμός των πελατών που αγοράζουν μόνο το Β, γ) ο αριθμός των πελατών που δεν αγοράζει κανένα από τα δύο προϊόντα, και δ) σε τι συμπέρασμα θα καταλήγαμε εάν με τα ίδια δεδομένα σας έλεγαν ότι ο αριθμός των πελατών είναι 350 αντί του 400.

ΛΥΣΗ

Έστω Α το σύνολο των καταναλωτών που αγοράζουν το προϊόν Α και Β το σύνολο των καταναλωτών που αγοράζουν το προϊόν Β. Συμβολίζω με n τον πληθικό αριθμό θα έχω ότι: n (Ω) =400, n (A)=285 και n (B)=210 με $n(A\cap B)=127$.

a) Για το συγκεκριμένο ερώτημα θέλουμε την διαφορά $A-B=\{x:x\in A\wedge x\notin B\}=\{x:x\in A\wedge x\in B'\}=\mathrm{A}\cap B'$. Οπότε ο αριθμός θα είναι $n(A-B)=285-127=158$
b) Για το συγκεκριμένο ερώτημα θέλουμε την διαφορά . Οπότε ο αριθμός θα είναι $B-A=\{x:x\in B\wedge x\notin A\}=\{x:x\in B\wedge x\in A'\}=\mathrm{B}\cap A'$. Οπότε ο αριθμός θα είναι $n(B-A)=210-127=83$
c) Ο αριθμός των πελατών που δεν αγοράζει κανένα από τα δύο προϊόντα εκφράζεται ως εξής: $\mathrm{A}'\cap B'$. Πιο συγκεκριμένα ο αριθμός,
$\mathrm{n}(\mathrm{A}'\cap B')=400-(285+83)=32$
d) Μόνοι σας!!!

Άσκηση 2

Εάν ισχύει ότι $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}=\{(0,\theta),(0,0)\}$ να βρείτε ποια είναι τα σύνολα Χ και Υ.

ΛΥΣΗ

Τα σύνολα $\mathrm{X}=\{0\},\mathrm{Y}=\{\theta,0\}$.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σύνολα να εξετάσετε εάν αυτά είναι ανοικτά, κλειστά ή συμπαγή.

$1.\left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0, i = 1,2 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 \geq 1\right\}$

$2.\left\{\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2 : x_i \geq 0, i = 1,2 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$

Άσκηση 4

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται η διμελής σχέση αRβ «η διαφορά α-β είναι πολλαπλάσιο του 50». Να δείξτε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας.

ΛΥΣΗ

Για να είναι σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να δείξουμε ότι η R είναι ανακλαστική, μεταβατική και συμμετρική.

1. Ανακλαστική: αRα-> η διαφορά α-α είναι πολλαπλάσιο του 50 που ισχύει
2. $\alpha R\beta, \beta R\gamma \Rightarrow \alpha R\gamma \forall \alpha \in A, \beta \in B, \gamma \in F$
   η διαφορά α-β είναι πολλαπλάσιο του 50 και μπορεί αν γραφεί ως α-β=50κ
   η διαφορά β-γ είναι πολλαπλάσιο του 50 και μπορεί να γραφεί ως β-γ=50λ
   Προσθέτω κατά μέλη οπότε α-γ=50(κ+λ)
3. $\alpha R\beta, \Rightarrow \beta R\alpha$ οπότε, α-β=50κ $\alpha - \beta = 50\kappa \Rightarrow \beta - \alpha = 50(-\kappa)$

Ασκηση 5

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται η διμελής σχέση αRβ «α,β ετσι ώστε αβ<0». Να εξετάσετε εάν αυτή η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

ΛΥΣΗ

Ανακλαστική: αRα-> αα<0 δηλαδή α2<0 το οποίο δεν ισχύει.

Συμμετρική: αRβ-> αβ<0 θα συνεπάγεται και ότι αβ<0 δηλαδή βRα. Αρα η συμμετρική ισχύει.

Μεταβατική: αRβ-> αβ<0 και το βRγ-> βγ<0 να συνεπάγεται το αRγ->αγ<0.

Μάθημα Τρίτης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 19/10/2020 & Τρίτη 20/10/2020

Πεδίο ορισμού

- **Πολυωνυμική συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού το R**
- **Κλασματικές συναρτήσεις** $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ **→ πεδίο ορισμού** $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ με } g(x) \neq 0\}$
- $\sqrt[n]{g(x)}$ **→ πεδίο ορισμού** $D_f = (x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0)$
- $\sin g(x)$ **→ πεδίο ορισμού** $D_f = D_g$
- $e^{g(x)}$ **→ πεδίο ορισμού** $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ με } x \in D_g\}$
- $\log_{g(x)} h(x)$ **→ πεδίο ορισμού** $D_f = \{x \in \mathbb{R} : h(x) > 0 \text{ και } 0 < g(x) \neq 1\}$

Προσοχή πρέπει να δοθεί στις περιπτώσεις όπου οι παραπάνω μορφές εμπεριέχονται η μια στην άλλη και προχωράμε στην συναλήθευση.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x - 1 \geq 0 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{array}\right\} ==> \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|4x-2| - |3x+6|}$

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να ισχύει: $|4x-2| - |3x+6| \geq 0$. Οπότε,

1) Όταν το $x \in (-\infty, -2]$ η παράσταση μου έχει την μορφή: $|4x-2| - |3x+6| = -4x + 2 + 3x + 6 = 8 - x$
2) Όταν το $x \in (-2, \frac{1}{2}]$ η παράσταση μου έχει την μορφή:

   $|4x-2| - |3x+6| = -4x + 2 - 3x - 6 = -7x - 4$

   Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει ότι $x \in (-2, \frac{1}{2}] \wedge -7x - 4 \geq 0$

3) Όταν το $x \in (1/2, +\infty)$ η παράσταση μου έχει την μορφή:

$$|4x-2|-|3x+6| = 4x-2-3x-6 = x-8$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι $(-\infty,-2]\cup(-2,-4/7]\cup[8,+\infty)$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{-2x^2+6x+4}{x^3-2x^2-5x+6}$

ΛΥΣΗ

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt[3]{-x^2-5x+6}, g(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-3}}$

ΛΥΣΗ

Στην πρώτη περίπτωση θα εξετάσω εάν $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : -x^2-5x+6 \geq 0\right\}$ ενώ στην δεύτερη περίπτωση θα πρέπει $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x-3 \neq 0 \wedge \dfrac{2x+1}{2x-3} \geq 0\right\}$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \ln\left(e^{2x}-4e^x+3\right)$

ΛΥΣΗ

$D_g = (-\infty, 0)\cup(\ln 3, +\infty)$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης $\varphi(x) = 3-\sqrt{1-x^2}$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ(χ) είναι $D_\varphi = [-1,1]$

$y = 3-\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y = 3-\sqrt{1-x^2} \wedge -1 \leq x \leq 1$

Με πεδίο τιμών το [2,3].

Άσκηση 7

Θεωρούμε την συνάρτηση f:[0, 8]->R. Να υπολογιστεί το πεδίο ορισμού $f(x^2-1)$

ΛΥΣΗ

Η συγκεκριμένη συνάρτηση αποτελεί σύνθεση των συναρτήσεων: f:[0, 8]->R και g:R→R με $g(x)=(x^2-1)$. Επομένως,

$$Dfog(x)=\left\{x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\wedge 0\le x^2-1\le 8\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\wedge 1\le x^2\le 9\right\}=$$
$$\left\{x\in\mathbb{R}\wedge 1\le |x|\le 3\right\}$$

Άρα, $Dfog(x)=[-3,-1]\cup[1,3]$

Άσκηση 8

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x^2+4x+1, g(x)=\log_k x, x\in\mathbb{R}_+^*, k>0$**. Θέλουμε να υπολογίσουμε την gof.**

ΛΥΣΗ

Το πρώτο μας βήμα είναι να υπολογίσουμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων. Συνεπώς, $D_f=\mathbb{R}, D_g=(0,+\infty)$**.** Για τον τύπο της σύνθετης συνάρτησης $(gof)(x)=g(f(x))=\log_k\left(3x^2+4x+1\right)$. Για το πεδίο ορισμού τώρα,

$$Dgof(x)=\left\{x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\wedge 3x^2+4x+1>0\right\}=(-\infty,-1)\cup\left(-1/3,+\infty\right)$$

Άσκηση 9

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:(-1,1)\to\left(3/2,+\infty\right)$ **με** $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$**. Εξετάστε εάν είναι συνάρτηση επί.**

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να δείξω ότι το σύνολο τιμών της f(x) ταυτίζεται με το σύνολο $Q=\left(3/2,+\infty\right)$. Να βρω τα y για τα οποία η $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ με άγνωστο το x έχει λύση στο (-1,1). Συνεπώς έπειτα από πράξεις $x(y-1)=y-2$

Εάν y=1 τότε x*0=-1 αδύνατη.

Εάν $y\neq 1\Rightarrow x=\dfrac{y-2}{y-1}$. Θα πρέπει $-1<\dfrac{y-2}{y-1}<1$ οπότε y>3/2. Οπότε $f(A)=\left(3/2,+\infty\right)$ και άρα είναι επί.

Άσκηση 10

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x+1}, x\in[0,+\infty)$**. Εξετάστε εάν αντιστρέφετε.**

ΛΥΣΗ

Κάνοντας πράξεις έχουμε ότι $x=\frac{-y}{y-1}$ η οποία είναι και η αντίστροφή της. Πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο των y για τα οποία το $x\in[0,+\infty)$. Δηλαδή, $-y(y-1)\geq 0$ άρα το y θα ανήκει στο [0,1).

Μάθημα Τέταρτης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 26/10/2020 & Τρίτη 27/10/2020

Άσκηση 1

Μια επένδυση έχει αρχικό κόστος 500.000 ευρώ και στην συνέχεια έχει κέρδη ως εξής. Το πρώτο έτος 200.000, το δεύτερο έτος 180.000 το τρίτο έτος 130.000 και το τέταρτο έτος 150.000. Εάν το επιτόκιο είναι i=0.08 είναι η επένδυση κερδοφόρα;

ΛΥΣΗ

Κριτήριο καθαρής παρούσας αξίας (ένα πρώτο παράδειγμα)

Το κριτήριο της καθαρής παρούσας αξίας στην απλή του μορφή μπορεί να υπολογιστεί υπό την έννοια των κερδών μείον του κόστους. Συνεπώς, θα πρέπει να υπολογίσετε τις παρούσες αξίες για τα τέσσερα έτη που εξετάζουμε.

Παρούσα αξία πρώτου έτους $P_1 = \frac{200000}{1+0.08} = 185.185$

Παρούσα αξία δεύτερου έτους $P_2 = \frac{180000}{(1+0.08)^2} = 154.320$

Παρούσα αξία τρίτου έτους $P_3 = \frac{130000}{(1+0.08)^3} = 103.198$

Παρούσα αξία τετάρτου έτους $P_4 = \frac{150000}{(1+0.08)^4} = 110.253$

Συνεπώς NPV=(185.185+$154.320+103.198+110.253$)-500.000>0 οπότε η επένδυση είναι κερδοφόρα.

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x->-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-4x+5}}{x+1}$

ΛΥΣΗ

Πρώτα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (χρήση μεγιστοβάθμιου).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{+2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

2. $\lim_{x->3}\frac{\sin(4x-12)}{2x-6}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x->0}\frac{\sin x}{x}=1$. Θα στηριχθούμε στο παραπάνω.

Θέτω 4x-12=u οπότε καθώς το x τείνει στο τρία το u θα τείνει στο μηδέν.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(ux-12)}{2x-6}=\lim_{u\to0}\frac{sinu}{\frac{u}{2}}=2\lim_{u\to0}\frac{sinu}{u}=2$$

3. $\lim_{x->0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x->0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x->1}\frac{\ln x}{x-1}=1$. Θα στηριχθούμε στα παραπάνω.

$$\lim_{x->0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}=\lim_{x->0}\left[3\frac{\ln(1+\sin 3x)}{(1+\sin 3x)-1}\frac{\sin 3x}{3x}\right]=3\lim_{x->0}\left[\frac{\ln(1+\sin 3x)}{(1+\sin 3x)-1}\right]\lim_{x->0}\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right]$$

Αλλαγή μεταβλητής και στο 1+sin3x=wμ οπότε όταν το x->0 το w θα τείνει στο ένα.

Αλλαγή μεταβλητής και όπου 3x=u και όταν το x →0 τότε και το u θα τείνει στο μηδέν.

Συνεπώς

$$\lim_{x->0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{x}=3\lim_{w->0}\left[\frac{\ln(w)}{w-1}\right]\lim_{u->0}\left[\frac{\sin u}{u}\right]=3\cdot1\cdot1=3$$

4. $\lim_{x->0}\frac{e^{5x}-1}{x}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x->0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Συνεπώς, $\lim_{x->0}\frac{e^{5x}-1}{5x}5=5\lim_{x->0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=5\lim_{u->0}\frac{e^u-1}{u}=5\cdot1=5$

5. $\lim_{x->0}\frac{a^{3x}-1}{\ln(2x+1)},0<a\neq1$

Χρησιμοποιούμε το εξής

$$\lim_{x->0}\frac{e^{3x\ln a}-1}{\ln(2x+1)}=\lim_{x->0}\left[\frac{e^{3x\ln a}-1}{\ln(2x+1)}\frac{3x\ln a}{3x\ln a}\right]=\lim_{x->0}\left[\frac{e^{3x\ln a}-1}{3x\ln a}\frac{3x\ln a}{\ln(2x+1)}\right]=\lim_{x->0}\left(\frac{e^{3x\ln a}-1}{3x\ln a}\right)\lim_{x->0}\left(\frac{3x\ln a}{\ln(2x+1)}\right)=$$

$$\lim_{x->0}\left(\frac{e^{3x\ln a}-1}{3x\ln a}\right)\lim_{x->0}\left(\frac{1}{2\ln(2x+1)\big/(2x+1)-1}3x\ln a\right)=$$

5. Να υπολογιστεί το όριο της συνάρτησης $\lim_{x->-3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

Πρώτα πρέπει να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,+3\}$ (χρήση περιπτώσεων και πλευρικά όρια).

Περίπτωση 1 Το x να τείνει -3 από τα αριστερά

$$\lim_{x->-3^-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x->-3^-}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x->-3^-}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\lim_{x->-3^-}\frac{1}{(x+3)}(x-2)=+\infty$$

Περίπτωση 2 Το x να τείνει -3 από τα δεξιά

$$\lim_{x->-3^+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x->-3^+}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x->-3^+}\frac{(x-2)}{(x+3)}=\lim_{x->-3^+}\frac{1}{(x+3)}(x-2)=-\infty$$

Δεν υπάρχει το όριο.

6. Συζυγής παράσταση

$$\lim_{x->-2}\frac{x+2}{\sqrt[4]{x+18}-2}=\lim_{x->-2}\frac{(x+2)\left(\sqrt[4]{x+18}+2\right)}{\left(\sqrt[4]{x+18}-2\right)\left(\sqrt[4]{x+18}+2\right)}=\lim_{x->-2}\frac{(x+2)\left(\sqrt[4]{x+18}+2\right)}{\left(\sqrt[4]{x+18}\right)^2-2^2}$$

Μόνοι σας!!!

7. Έννοιες κατακόρυφης και οριζόντιας ασύμπτωτης.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(3\lambda-1)x+3}{2x+\mu-6}$. Να βρεθούν τα λ,μ που ανήκουν στους πραγματικούς αριθμούς έτσι ώστε η συνάρτηση f να έχει οριζόντια ασύμπτωτη y=4 και κατακόρυφη ασύμπτωτη x=2.

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα χρησιμοποιούμε την θεωρία. Συνεπώς η y=4 θα είναι οριζόντια ασύμπτωτη όταν θα ισχύει ότι $\lim_{x->+\infty}\frac{(3\lambda-1)x+3}{2x+\mu-6}=4=\lim_{x->-\infty}\frac{(3\lambda-1)x+3}{2x+\mu-6}$, θα είναι

$\lim_{x->+\infty}\frac{(3\lambda-1)+3/x}{2+\mu/x-6/x}=4=\lim_{x->-\infty}\frac{(3\lambda-1)+3/x}{2+\mu/x-6/x}$, . Αρα $\frac{(3\lambda-1)}{2}=4\Leftrightarrow\lambda=3$.

Η ευθεία x=2 θα είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω :

$$\lim_{x->2}\frac{(3\lambda-1)x+3}{2x+\mu-6}=\pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x->2}\left(2x+\mu-6\right)=0 \Leftrightarrow 4+\mu-6=0 \Leftrightarrow \mu=2$$

Θα πρέπει όμως να ισχύει παράλληλα ότι $\lim_{x->2}\left[(3\lambda-1)x+3\right]\neq 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lambda\neq\frac{-1}{6}$

8. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια την παρακάτω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0\\ \ln(x+3), -3<x\leq 0\end{cases}$

i) Για τιμές του x>0 η f(x) είναι συνεχής γιατί οι επιμέρους συναρτήσεις είναι και αυτές συνεχείς και μάλιστα και το πηλίκο αυτών $\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}$ για x>0 είναι συνεχής συνάρτηση.

ii) Για κάθε x που ανήκει στο διάστημα (-3,0) η συνάρτηση f είναι συνεχής ως συνάρτηση ln.

iii) Για x=0 θα έχουμε

A) $\lim_{x->0^+} f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0\\ \ln(x+3), -3<x\leq 0\end{cases}$ που είναι $\lim_{x->0^+} f(x)=\lim_{x->0^+}\frac{3^x-1}{\ln(x+1)}=...=\ln 3$

B) $\lim_{x->0^-} f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^x-1}{\ln(x+1)}, x>0\\ \ln(x+3), -3<x\leq 0\end{cases}$ που είναι $\lim_{x->0^-} f(x)=\lim_{x->0^-}\left[\ln(x+3)\right]=\ln 3$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Μάθημα Πέμπτης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 2/11/2020 & Τρίτη 3/11/2020

Άσκηση 1

Η μάζα ενός μονοκύτταρου οργανισμού αυξάνει συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τον εξής τύπο $m(t) = 2 + 6t + 3t^2$. Τι μας δείχνει η ποσότητα m(2); Τι μας δείχνει η ποσότητα dm/dt την χρονική στιγμή t=2;

ΛΥΣΗ

Η ποσότητα m(2) μας δίνει την μάζα του οργανισμού την χρονική στιγμή t=2 συνεπώς $m(2) = 2 + 6*2 + 3*4 = 26$. Η ποσότητα dm/dt την χρονική στιγμή t=2 υπολογίζεται $\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d\left(2 + 6t + 3t^2\right)}{dt} = 6 + 6t, \left.\frac{dm(t)}{dt}\right|_{t=2} = 18$. Η ποσότητα 18 μας δείχνει τον ρυθμό αύξησης κατά την χρονική στιγμή t=2.

Άσκηση 2

Το εθνικό εισόδημα μιας χώρας αυξάνει σύμφωνα με τον τύπο $g(t) = Ae^{0.1\sqrt{t}}, A = 200\varepsilon\kappa$ και ο πληθυσμός με βάση την συνάρτηση $P = h(t) = Be^{0.03t}, B = 2 \cdot 10^7$. Ποιος ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής του κ.κ. ΑΕΠ την χρονική στιγμή t=4;

ΛΥΣΗ

Ο ρυθμός μεταβολής του κ.κ. ΑΕΠ δίνεται από τον τύπο $GDP(percapita) = \frac{g(t)}{h(t)} = \frac{200e^{0.1\sqrt{t}}}{2 \cdot 10^7 e^{0.03t}}$. Η συνάρτηση που μας ζητείται να υπολογίσουμε είναι η εξής: $\frac{dGDP(percapita)}{dt} = \frac{d\left(\frac{g(t)}{h(t)}\right)}{dt} = \frac{\frac{dg(t)}{dt}h(t) - \frac{dh(t)}{dt}g(t)}{h^2(t)} = \frac{20\sqrt{t}e^{-1/2}\left(2 \cdot 10^7 e^{0.03t}\right) - 200e^{0.1\sqrt{t}}2 \cdot 10^7 e^{0.03t}0.03}{\left(2 \cdot 10^7 e^{0.03t}\right)^2}$

Με αντικατάσταση για t=4 $\frac{dGDP(percapita)}{dt} = -0.05\%$

Άσκηση 3

Μια οικολογική οργάνωση εκτιμά ότι ο πληθυσμός μιας πόλης είναι x χιλιάδες άνθρωποι, το μέσο επίπεδο L του μονοξειδίου του άνθρακος στη ατμόσφαιρα πάνω από την πόλη θα είναι L ppm, όπου $L=10+0.4P+0.0001P^2$. Ο πληθυσμός της πόλης εκτιμάται ότι είναι $P=752+23t+0.5t^2$ χιλιάδες κάτοικοι, t έτη από σήμερα. Πόσο γρήγορα σε σχέση με τον χρόνο αυξάνει το επίπεδο του μονοξειδίου την χρονική στιγμή t=2;

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να υπολογίσω την παράγωγο dL/dt. Επειδή το επίπεδο μόλυνσης εξαρτάται από τον πληθυσμός και ο πληθυσμός εξαρτάται από τον χρόνο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης.

Με βάση αυτό θα έχουμε $\frac{dL}{dt}=\frac{dL}{dP}\frac{dP}{dt}=(0.4+0.0002P)(23+t)$

Για t=2 από τη εξίσωση του πληθυσμού έχω ότι P=752+46+2=800.

Αντικαθιστώντας θα έχουμε $\frac{dL}{dt}=\frac{dL}{dP}\frac{dP}{dt}=(0.4+0.0002\cdot 800)(23+2)=14$

Μάθημα Έκτης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 9/11/2020 & Τρίτη 10/11/2020

Άσκηση 1

Να υπολογιστούν οι παρακάτω παράγωγοι.

$1. g(x) = \ln(x^3 - x^2)$

$2. f(x) = x^2 e^x \log x$

$3. f(x) = \cos\sqrt{1-x^2}$

$4. f(x) = x^2 \sin x$

$5. f(x) = \left(x^2+1\right)^{3x}$

$6. f(x) = \sqrt{1/x^2+1}$

$7. f(x) = \left(\frac{e^x \log x}{\sqrt{1/x^2+1}}\right)$

$8. f(x) = \frac{\cos(nx)}{e^{nx-2n^2x^3}}$

ΛΥΣΗ

$$g(x) = \ln(x^3 - x^2) = \frac{(x^3-x^2)'}{(x^3-x^2)} = \frac{(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)} = \frac{(3x-2)}{(x^2-x)}$$

$$f(x) = \cos\sqrt{1-x^2} = -\sin\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\sin\sqrt{1-x^2}\,\frac{1\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sin\sqrt{1-x^2}\,\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\sin\sqrt{1-x^2}\,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \left(\frac{e^x \log x}{\sqrt{1/x^2+1}}\right) = \frac{\left(e^x \log x\right)'\left(\sqrt{1/x^2+1}\right) - \left(\sqrt{1/x^2+1}\right)'\left(e^x \log x\right)}{\left(\sqrt{1/x^2+1}\right)^2} =$$

$$\frac{\left[(e^x)'(\log x) + (\log x)' e^x\right]\left(\sqrt{1/x^2+1}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{1/x^2+1}}\left(1/x^2+1\right)'\right)\left(e^x \log x\right)}{\left(\sqrt{1/x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left[(e^x)(\log x) + \frac{1}{x}e^x\right]\left(\sqrt{1/x^2+1}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{1/x^2+1}}\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)\left(e^x \log x\right)}{1/x^2+1}$$

Άσκηση 2

Οι ετήσιες πωλήσεις μιας επιχείρησης υπολογίζονται εμπειρικά με βάση τον ακόλουθο τύπο $Sales = 50000\sqrt{e^{\sqrt{t}}}$ όπου t είναι οι μήνες λειτουργίας της επιχείρησης. Υπολογίσατε τον ρυθμό μεταβολής της επιχείρησης όταν t=4.

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να υπολογίσω την παράγωγο dsales/dt. Υπολογίζω την παράγωγο

$$Sales = \frac{d\left(50000\sqrt{e^{\sqrt{t}}}\right)}{dt} = 50000\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{t}}}}\frac{d\left(e^{\sqrt{t}}\right)}{dt} = 50000\frac{\left(e^{\sqrt{t}}\right)}{2\sqrt{e^{\sqrt{t}}}}\frac{d\left(\sqrt{t}\right)}{dt} =$$

$$50000\frac{t\left(e^{\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{e^{\sqrt{t}}}} = 50000\frac{e^2}{2e} = 25000e$$

Σημείωση: Στην περίπτωση όπου $Sales = 50000\sqrt{e^{\sqrt{Q}}}$ αλλά η ποσότητα που πουλάει η επιχείρηση δίνεται ως εξής $Q=2t^2+1$ ποιο θα είναι το αποτέλεσμα;

Θα πρέπει να υπολογίσω την παράγωγο dsales/dt. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας και να έχουμε το εξής;

Με βάση αυτό θα έχουμε $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dQ}\frac{dQ}{dt} = 50000\frac{t\left(e^{\sqrt{t}}\right)}{4\sqrt{t}\sqrt{e^{\sqrt{t}}}}2t$. Με αντικατάσταση για t=4 υπολογίζω το αποτέλεσμα.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $e^{xy} + x - y = 1$ (έννοια πεπλεγμένης συνάρτησης).

ΛΥΣΗ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(e^{xy} + x - y - 1\right)}{dx} \Leftrightarrow \frac{d\left(e^{xy}\right)}{dx} + \frac{d\left(x\right)}{dx} + \frac{d\left(-y\right)}{dx} = 0 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + ye^{xy}}{1 - xe^{xy}}$$

Θα ήθελα να συνεχίσετε με την δεύτερη παράγωγο.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η εξής παράγωγος $\frac{d^4\left(xe^x\right)}{dx^4}$.

ΛΥΣΗ

Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Leibnitz:

Σημείωση: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}, 0!=1$

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}\left(e^{x}\right)^{k}=\binom{4}{0}x^{4-0}\left(e^{x}\right)^{0}+\binom{4}{1}x^{4-1}\left(e^{x}\right)^{1}+\binom{4}{2}x^{4-2}\left(e^{x}\right)^{2}+\binom{4}{3}x^{4-3}\left(e^{x}\right)^{3}+\binom{4}{4}x^{4-4}\left(e^{x}\right)^{4}=$$

$$\binom{4}{0}x^{4-0}\left(e^{x}\right)^{0}+\binom{4}{1}x^{4-1}\left(e^{x}\right)^{1}+\binom{4}{2}x^{4-2}\left(e^{x}\right)^{2}+\binom{4}{3}x^{4-3}\left(e^{x}\right)^{3}+\binom{4}{4}x^{4-4}\left(e^{x}\right)^{4}=$$

$$=\frac{4!}{0!4!}x^{4}+\frac{4!}{1!3!}x^{3}e^{x}+\frac{4!}{2!2!}x^{2}\left(e^{x}\right)^{2}+\frac{4!}{3!1!}x\left(e^{x}\right)^{3}+\frac{4!}{4!0!}\left(e^{x}\right)^{4}=$$

$$=x^{4}+4x^{3}e^{x}+6x^{2}\left(e^{x}\right)^{2}+4x\left(e^{x}\right)^{3}+\left(e^{x}\right)^{4}$$

Άσκηση 4

Η ποσότητα πώλησης (Q) και η τιμή ενός προϊόντος (P) συνδέονται με την κάτωθι σχέση: 2Q-24+3P=0. Να υπολογίσετε τα οριακά έσοδα όταν Q=3.

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση των εσόδων θα πρέπει να υπολογίσουμε το εξής; TR=P*Q. Θα λύσω την συνάρτηση ζήτησης ως προς P, οπότε P=8-2/3Q. Άρα, TR=P*Q= (8-2/3Q)*Q. Για να υπολογίσουμε τα οριακά έσοδα θα πρέπει να παραγωγίσουμε την TR ως προς Q.

$\frac{dTR}{dQ}=\frac{d\left(8Q-\frac{2}{3}Q^{2}\right)}{dQ}=8-\frac{4}{3}Q$ και για ποσότητα ίση με 3 θα έχουμε ότι MR=4.

Άσκηση 5

Το μέσο κόστος AC μιας επιχείρησης και το επίπεδο παραγωγής αυτής συνδέονται με την σχέση AC=20/Q+3+0.5Q. Υπολογίστε το οριακό κόστος.

ΛΥΣΗ

Το μέσο κόστος δίνεται από την σχέση AC=TC/Q, συνεπώς TC=AC*Q=20+3Q+0.5Q^2. Θα πρέπει να παραγωγίσουμε την TC ως προς Q.

$$\frac{dTC}{dQ}=\frac{d\left(20+3Q+0.5Q^{2}\right)}{dQ}=3+Q$$

Άσκηση 6

Τακτικά 18000 άτομα μετακινούνται με τρένο κάθε μέρα για την εργασία τους και πληρώνουν τιμή εισιτηρίου με επιστροφή 4 ευρώ. Ο αριθμός των ατόμων που είναι πρόθυμοι να ταξιδέψουν στην συγκεκριμένη τιμή δίνεται από την παρακάτω συνάρτηση ζήτησης $Q = 600\left(5-\sqrt{P}\right)$. Η επιχείρηση θα ήθελε να αυξήσει τα έσοδά της. Θα πρέπει να αυξήσει ή αν μειώσει την τιμή του εισιτηρίου;

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την ελαστικότητα για τιμή P=4. Για P=4 με αντικατάσταση Q=1800.

$\varepsilon_d = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \frac{d\left(600\left(5-\sqrt{P}\right)\right)}{dP}\frac{P}{Q} = \frac{-300}{\sqrt{P}}\frac{P}{Q} = \frac{-300}{\sqrt{4}}\frac{4}{1800} = -\frac{1}{3}$. Κάθε αύξηση της τιμής θα οδηγήσει σε αύξηση των συνολικών εσόδων.

Άσκηση 7

Η ζήτηση ενός προϊόντος μιας επιχείρησης περιγράφεται από την σχέση Q+2P=300. Όταν η ζήτηση φθάσει στο επίπεδο των 40 μονάδων ο ρυθμός μεταβολής είναι ίσος με 2.

α)Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής των εσόδων εάν η επιχείρηση προσαρμόζει τις τιμές στη μεταβαλλόμενη ζήτηση.

β) Εάν στην επιχείρησης κοστίζει 225+60Q μονάδες να παράγει Q μονάδες αγαθού , υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση εσόδων TR=PQ. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε την $\frac{dTR}{dt} = \frac{d\left(P\cdot Q\right)}{dt} = \frac{dP}{dt}Q + \frac{dQ}{dt}P$ (1) . Όταν η ζήτηση φθάσει στο επίπεδο των 40 μονάδων και το P=130 ο ρυθμός μεταβολής είναι ίσος με 2 δηλαδή $\frac{dQ}{dt} = 2$. Θεωρούμε την σχέση Q+2P=300, παραγωγίζω ως προς t συνεπώς, $\frac{dQ}{dt} + 2\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = -1.$

Πηγαίνω στην αρχική μου σχέση $\frac{dTR}{dt} = \frac{d\left(P\cdot Q\right)}{dt} = \frac{dP}{dt}Q + \frac{dQ}{dt}P$ =-1·40+130•2=200

Β)Δικό σας . Να θυμίσουμε ότι Π(Q)=TR(Q)-TC(Q).

Άσκηση 8

Μια επιχείρηση έχει την ακόλουθη συνάρτηση παραγωγής $Q=0.7L^{0.89}$.

α) Υπολογίστε το οριακό προϊόν της εργασίας

β) Η επιχείρηση έχει 100 εργάτες. Κατά πόσο θα μεταβληθεί (αυξηθεί –μειωθεί) ***προσεγγιστικά*** η παραγωγή της εάν προσλάβει 2 ακόμα εργαζόμενους.

ΛΥΣΗ

α) Το οριακό προϊόν της εργασίας $MP_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{d(0.7L^{0.89})}{dL} = 0.7 \cdot 0.89L^{0.89-1} = 0.623L^{-0.11}$

.

β) Κάποιος θα μπορούσε να υπολογίσει την διαφορά $[0.7*102^{0.89}-0.7*100^{0.89}]$.

Ωστόσο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του διαφορικού.

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dL}\right)_{L=L_0} dL = \left(0.623L^{-0.11}\right)_{L=100} \left(102-100\right) = 2 \cdot 0.623 \cdot 100^{-0.11} \simeq 0.751$$

Μάθημα Έβδομης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 16/11/2020 & Τρίτη 17/11/2020

Άσκηση 1

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση ζήτησης $Q=\frac{1000}{\sqrt{P}}$. Να βρείτε την ελαστικότητα ζήτησης για τιμή 3 και 5 και να *εκτιμήσετε* την μεταβολή στα συνολικά έσοδα καθώς η τιμή μεταβάλλεται ανάμεσα στα δύο αυτά όρια.

ΛΥΣΗ

Η ελαστικότητα υπολογίζεται από τον τύπο

$$\varepsilon_d=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{d\left(\frac{1000}{\sqrt{P}}\right)}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{(1000)'\sqrt{P}-1000\left(\sqrt{P}\right)'}{\left(\sqrt{P}\right)^2}\frac{P}{Q}=\frac{-1000}{2\sqrt{P}}\frac{P}{1000/\sqrt{P}}=-1/2$$

Θέλω να υπολογίσω την μεταβολή στα έσοδα TR=PQ για το διάστημα των τιμών 3 έως 5.

Με βάση την έννοια του διαφορικού μπορώ να υπολογίσω την μεταβολή, προσεγγιστικά στα συνολικά έσοδα.

$4\mathrm{T}^2+\mathrm{C}^2=4000$Χρησιμοποιώντας

$$\frac{dTR}{dP}=TR'\Leftrightarrow dTR=TR'dP\Leftrightarrow dTR=\left(PQ\right)'(5-3)\Leftrightarrow$$

$$dTR=2\left(\frac{1000P}{\sqrt{P}}\right)'=2\left(\frac{500}{\sqrt{P}}\right)=\frac{1000}{\sqrt{3}}$$

Άσκηση 2

Μια επιχείρηση κατασκευάζει τηλεοράσεις και υπολογιστές με βάση την σχέση $4\mathrm{T}^2+\mathrm{C}^2=4000$. Να υπολογίστε την *οριακή υποκατάσταση* υπολογιστών από τηλεοράσεις και τηλεοράσεις από υπολογιστές όταν T_0=60 και C_0=160.

ΛΥΣΗ

Πρέπει να υπολογίσω τις παραγώγους dT/dC και dC/dT.

Θα πρέπει να παραγωγίσουμε την συνάρτηση $4\mathrm{T}^2+\mathrm{C}^2=4000$ πεπλεγμένα. Δηλαδή,

$8T+2C\frac{dC}{dT}=0\Leftrightarrow\frac{dC}{dT}=-\frac{4T}{C}$. Με αντικατάσταση $\frac{dC}{dT}=-\frac{4T}{C}=-1.5$. Αντίστοιχα $\frac{d\mathrm{T}}{dC}=-\frac{2}{3}$.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο *ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής*, της χρονική στιγμή t=4 έτη, των εσόδων μιας επιχείρησης η οποία παράγει ένα προϊόν με επίπεδο παραγωγής $Q(t)=8000e^{0.1\sqrt{t}}$ μονάδες προϊόντος ανά έτος εάν η τιμή της μονάδας του προϊόντος δίνεται ως εξής $P(t)=50e^{0.2\sqrt{t}}$

ΛΥΣΗ

Τα συνολικά έσοδα TR, $TR(t)=Q(t)P(t)=50e^{0.2\sqrt{t}}8000e^{0.1\sqrt{t}}=400000e^{0.3\sqrt{t}}$

$$\Pi ososti\alpha i\alpha \text{ Μεταβολή}=\left(\frac{TR'(x)}{TR(x)}\right)100=$$

Υπολογίζω τον ρυθμό μεταβολής ως εξής:

$$=\frac{\frac{d(400000e^{0.3\sqrt{t}})}{dt}}{400000e^{0.3\sqrt{t}}}*100=$$

Να υπολογίσετε τον *ρυθμό μεγέθυνσης* της συνάρτησης $TR(t)=400000e^{0.3\sqrt{t}}$. Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεγέθυνσης χρησιμοποιούμε συνήθως τον τύπο:

$$r=\frac{d}{dt}\ln(TR(t))=\frac{d}{dt}\ln(400000e^{0.3\sqrt{t}})=.....$$

Μάθημα Όγδοης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 23/11/2020 & Τρίτη 24/11/2020

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $R(x)=\begin{cases} x^3+\beta x+\gamma, x\in[-2,0] \\ ax^3+4x+2, x\in(0,2] \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα α,β,γ που ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle.

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

1) Η R πρέπει να είναι συνεχής στο [-2,2]. Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^+} R(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(ax^3+4x+2\right)=2$$
$$\lim_{x\to 0^-} R(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+\beta x+\gamma\right)=\gamma$$
Συνεπώς γ=2

2)
$$R_\delta'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^3+\beta x+\gamma\right)-\gamma}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^3+\beta x+\gamma\right)-2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+\beta x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\beta\right)$$
$$R_a'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\alpha x^3+4x+2\right)-\gamma}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\alpha x^3+4x+2\right)-2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(ax^2+4)$$

Συνεπώς β=4

3)
$$R(-2)=R(2)\Leftrightarrow(-2)^3+\beta(-2)+\gamma=a2^3+8+2\Leftrightarrow -8-2\beta+2=8\alpha+10\Leftrightarrow$$
$$8\alpha+2\beta=-16$$

Με αντικατάσταση το α=-3.

Άσκηση 2

Δείξτε ότι η εξίσωση $x+2+\ln(3+x^2)=0$ έχει μια και μοναδική πραγματική ρίζα.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x+2+\ln(3+x^2)$ και υπολογίζω την παράγωγο της.

$\frac{dg(x)}{dx}=1+\frac{2x}{3+x^2}=\frac{x^2+2x+3}{3+x^2}$ καθαρά μεγαλύτερο ή ίσο του μηδέν, συνεπώς η g(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R. Υπολογίζω τα όρια της συνάρτησης g(x) σε συν-πλην άπειρο.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\ln(3+x^2)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\ln(3+x^2)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{2+\ln(3+x^2)}{x}\right)\right]$$

Εφαρμόζω L'Hospital για το δεύτερο μέρος

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\ln(3+x^2)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{x^2}+1} = 0$$

Συνεπώς $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\ln(3+x^2)\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\frac{2+\ln(3+x^2)}{x}\right)\right] = -\infty$

Άσκηση 3

Μια επιχείρηση παράγει ένα προϊόν χρησιμοποιώντας έναν μόνο παραγωγικό συντελεστή (αυτόν της εργασίας). Η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος δίνεται ως εξής: $Q = aL^b, a>0, b>0$. Εάν w η τιμή του παραγωγικού συντελεστή της εργασίας και C_0 το σταθερό κόστος να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις συνολικού και οριακού κόστους. Να δείξετε ότι εάν η συνάρτηση παραγωγής είναι κυρτή (κοίλη) τότε η συνάρτηση συνολικού κόστους είναι κοίλη (κυρτή).

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση συνολικού κόστους δίνεται ως εξής: $TC = C_0 + wL = C_0 + w\left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$ συνεπώς το οριακό κόστος $MC = \frac{d\left[C_0 + w\left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{b}}\right]}{dQ} = \frac{w}{b}\frac{1}{a^{1/b}}Q^{\frac{1}{b}-1}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την $\frac{dQ}{dL} = \frac{d\left(aL^b\right)}{dL} = abL^{b-1}, \frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{d\left(abL^{b-1}\right)}{dL} = ab(b-1)L^{b-2}$.

Η συνάρτηση παραγωγής θα είναι κοίλη $Q = aL^b, a>0, b>0$ με $\frac{dQ}{dL} = \frac{d\left(aL^b\right)}{dL} = abL^{b-1}$ όταν b>1 (κοίλη b<1) οπότε η συνάρτηση θα είναι κοίλη (κυρτή).

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τα σημεία καμπής της συνάρτησης $h(x) = x^4 - 18x^2$.

ΛΥΣΗ

Απάντηση: Τα σημεία όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος είναι x=0,-3,3 αποτελούν σημεία τοπικών ακροτάτων.

Υπολογίζουμε της δεύτερης τάξεως παράγωγο $h_1(x)=12x^2-36$ και την μηδενίζουμε $h''(x)=0, x=\pm\sqrt{3}$ και τα $h''(\sqrt{3})=0=h''(-\sqrt{3})$. Συνεπώς τα σημεία καμπής είναι το $x=\pm\sqrt{3}$.

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τα σημεία καμπής της συνάρτησης $h(x)=x^3e^{-x^2}$.

ΛΥΣΗ

Απάντηση: Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο $h'(x)=3x^2e^{-x^2}-2x^4e^{-x^2}$ όπως και την δεύτερης τάξεως παράγωγο $h''(x)=2xe^{-x^2}\left(2x^4-7x^2+3\right)$. Τα σημεία όπου μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος είναι $x=0,\pm\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ και αποτελούν πιθανά σημεία καμπής αποτελούν σημεία .

Άσκηση 6

Η συνάρτηση κόστους ενός προϊόντος είναι $TC(Q)=40Q+20000$ και η συνάρτηση ζήτησης $P(Q)=160-\frac{Q}{100}$. Ποια ποσότητα που μεγιστοποιεί το κέρδος.

ΛΥΣΗ

Συνάρτηση κερδών: Έσοδα- Κόστος, με μαθηματικούς όρους

Άσκηση 7

Τα έσοδα από την υλοτόμηση ενός δάσους, σε τρέχουσες τιμές, είναι $R(t)=\lambda e^{\sqrt{t}}, \lambda>0$. Εάν υπάρχει πληθωρισμός r, υπολογίστε την χρονική στιγμή που μεγιστοποιεί την παρούσα αξία του εσόδου.

ΛΥΣΗ

Σημείωση ότι η παρούσα αξία $PV(t)=R(t)e^{-rt}$.

Μάθημα Ένατη Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 30/11/2020 & Τρίτη 1/12/2020

Άσκηση 1

Σε μια αγορά πλήρους ανταγωνισμού, οι συναρτήσεις ζήτησης και προσφορά δίνονται παρακάτω ως εξής: D(P)=4-5P, S(P)=-7+10P. Εάν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m ευρώ <u>ανά μονάδα πωλούμενου προϊόντος</u> να υπολογίσετε:

Α) Την τιμής της m που μεγιστοποιεί τα συνολικά έσοδα από την φορολογία,

Β) Την μείωση του φόρου λόγω της προσφερόμενης ποσότητας

Θεωρούμε ότι όλη η φορολογία θα επιβαρύνει μόνο τον παραγωγό.

ΛΥΣΗ

Εάν η κυβέρνηση επιβάλλει φορολογία m ευρώ ανά Q πωλούμενου τότε η συνάρτηση που θα επηρεαστεί θα είναι η συνάρτηση προσφοράς. Η καινούργια συνάρτηση προσφοράς θα δίνεται ως εξής: S*(P)=-7+10(P-m).

Ωστόσο, η άσκηση μας αναφέρει ότι η αγορά είναι σε πλήρη ανταγωνισμού και συνεπώς, D*(P)= S*(P) και άρα $4-5P=-7+10(P-m) \Leftrightarrow P=\frac{11+10m}{15}$

Οι συνολικές εισπράξεις από την φορολογία δίνονται ως εξής:

$TXR(P)=mS^*(P^*)=m\left(-7+10\left(\frac{11+10m}{15}-m\right)\right)=-7m+\frac{110+100m}{15}-10m$. Για να υπολογίσω το μέγιστο θα πρέπει να υπολογίσω τις παρακάτω παραγώγους:

$\frac{dTXR(P)}{dm}=\frac{d\left(-7m+\frac{110+100m}{15}-10m\right)}{dm}=\frac{1-20m}{3}$ Θέτοντας την πρώτη παράγωγο ίση με το μηδέν θα έχουμε ότι $m=\frac{1}{20}$. *Η δεύτερη τάξεως παράγωγος*

$\frac{d^2TXR(P)}{dm^2}=\frac{d\left(\frac{1-20m}{3}\right)}{dm}=-\frac{20}{3}<0$

Β) Δεδομένο ότι η προσφορά ήταν S(P)=-7+10P με τιμή ισορροπίας P=11/15 μπορούμε με αντικατάσταση να υπολογίσουμε το S(P)=1/3. Μετά την επιβολή του φόρου είδαμε ότι η συνάρτηση προσφοράς μετατοπίστηκε. Πάλι με αντικατάσταση

$S^*(P^*) = \left(-7 + 10\left(\frac{11 + 10\,1/20}{15} - \frac{1}{20} \right) \right) = \frac{1}{6}$.Άρα η ποσότητα που χάνεται είναι η διαφορά και ισούται με 1/6.

Άσκηση 2

Κάθε εβδομάδα 1200 επιβάτες χρησιμοποιούν το τρένο με εισιτήριο 2000 μονάδες. Κάθε μείωση του εισιτηρίου κατά 100 μονάδες αυξάνει τους επιβάτες κατά 100. Ποια τιμή εισιτηρίου μεγιστοποιεί τα έσοδα;

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση των συνολικών εσόδων που μας ζητείται δίνεται ως εξής TR=P(Q)Q. Συνεπώς θα πρέπει να γνωρίζουμε ποια είναι η συνάρτηση ζήτησης. Εάν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση ζήτησης είναι γραμμική και σκεφτούμε τη εξής μορφή Q=a+bP. Όταν η τιμή είναι 2000 μονάδες η ποσότητα είναι 1200. Επίσης γνωρίζουμε ότι εάν η τιμή μειωθεί κατά 100 η ποσότητα θα αυξηθεί κατά 100. Δηλαδή όταν P=1900 τότε Q=1300.

1200=2000a+b, 1300=1900a+b. Λύνοντας η συνάρτηση ζήτησης Q=3200-P.

Συνεπώς:

$TR(P) = P(3200 - P)$ *με* $\frac{dTR(P)}{dP} = 3200 - 2P, \frac{d^2TR(P)}{dP^2} = -2 < 0$. Το σημείο που μεγιστοποιούνται τα έσοδα ισούται με P=1600.

Άσκηση 3

Προσεγγίσεις μέσω Taylor.

Να προσεγγίσετέ την συνάρτηση f(x)=ln(x) και να υπολογίσετε τον αριθμό ln(1.25) με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

ΛΥΣΗ

Έγινε μέσω γραφίδας.

Μάθημα Δέκατη Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 07/12/2020 & Τρίτη 08/12/2020

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

ΛΥΣΗ

1.$\int 2^{5x}\,dx = \frac{2^{5x}}{5ln2} + C$

2. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int e^x dx + \frac{1}{2}\int e^{-x} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$

3.$\int \frac{3^{x+2}-3^x}{6^x} dx = \int \frac{3^{x+2}}{6^x} dx - \int \frac{2^x}{6^x} dx, 9\int 2^{-x}\,dx - \int 3^{-x}\,dx = \frac{-3\cdot 2^x}{\ln 2} + \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

4. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

Άσκηση 2

Τα οριακά έσοδα μιας επιχείρησης δίνονται ως εξής: $MR = 22 - 4Q + 7\sqrt{Q}$ Εάν την χρονική στιγμή ίση με το μηδέν δεν υπάρχουν έσοδα, ποια η συνάρτηση των εσόδων;

ΛΥΣΗ

Πολύ απλά θα πρέπει να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης οριακών εσόδων. Δηλαδή, $TR = \int \left(22 - 4Q + 7\sqrt{Q}\right) dQ = 22Q - 2Q^2 + 14\frac{Q^{3/2}}{3} + C$. Από την αρχική μας συνθήκη θα έχουμε ότι TR(0)=0 συνεπώς C=0.

Άσκηση 3

Η οριακή ροπή για κατανάλωση δίνεται ως εξής: $MPC = 0.6 + 0.2Y^{-1/2}$ και η κατανάλωση ισούται με το εισόδημα Υ όταν Υ=100. Να υπολογίσετε τη συνάρτηση κατανάλωσης.

ΛΥΣΗ

Πολύ απλά θα πρέπει να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της συνάρτηση κατανάλωσης.. Δηλαδή, $CON = \int \left(0.6 + 0.2Y^{-1/2}\right) dY = 0.6Y + 0.4Y^{1/2} + C$. Από την συνθήκη μας θα έχουμε ότι Υ=100 τότε C=Y συνεπώς 100=60+4+C άρα C=36. Άρα, $CON = 0.6Y + 0.4Y^{1/2} + 36$

Άσκηση 4 (Μέθοδος Αντικατάστασης)

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$

2. $\int \frac{dx}{2x+3}$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

4. $\int \frac{x+\sqrt[6]{x^7}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

Άσκηση 5 (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

Άσκηση 6 (Κλασματικές Παραστάσεις)

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα:

Οι ασκήσεις 5 & 6 έγιναν μέσω της γραφίδας.

Μάθημα Ενδέκατη Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 14/12/2020 & Τρίτη 15/12/2020

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τον οριζόντιο άξονα, τις ευθείες x=0,x=8 και την γραφική παράσταση της f(x)=-$x^2+7x-10$

ΛΥΣΗ

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από το γράφημα της $f(x)=x^2-2x$ τον άξονα των x'x και τις ευθείες x=0 και χ=4

ΛΥΣΗ

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 (x^2-2x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^4=\frac{64}{3}-16$ το οποίο είναι λάθος λόγω ότι δεν έχετε κάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης που υπολογίζεται.

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 (x^2-2x)dx+\int_2^4 (x^2-2x)dx==-\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^4=$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=8$$

Άσκηση 3

Η συνάρτηση κέρδους μιας επιχείρησης είναι Π(q)=5000-q-3062500/q και το παραγόμενο προϊόν μεταβάλλεται από 1000 σε 3000 μονάδες. Ποιο το μέσο κέρδος της επιχείρησης;

ΛΥΣΗ

$$\mathrm{E}(\Pi(Q))=\frac{1}{b-a}\int_a^b \Pi(Q)dQ=\frac{1}{3000-1000}\int_{1000}^{3000} 5000-Q-\frac{3062500}{Q}dQ=$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_{-4}^{4}|x|dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{-4}^{4}|x|dx=\int_{-4}^{0}|x|dx+\int_{0}^{4}|x|dx=\int_{-4}^{0}-xdx+\int_{0}^{4}xdx=-[F(0)-F(4)]+[F(4)-F(0)]=$$

$$=-[0-8]+[8-0]=16$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_e^1 x\ln x dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_e^1 x\ln x dx = \int_e^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^1 - \int_e^1 \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^1 - \int_e^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_e^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^1 = \left[0.5\ln 1 - \frac{e^2}{2}\ln e\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right] =$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3-2x}}$

ΛΥΣΗ

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3-2x}} = ... = \frac{6\sqrt{3}-8}{3}$$

Άσκηση 7

Μια ανταγωνιστική αγορά περιγράφεται από την μη γραμμική συνάρτηση ζήτησης $P = 1,946 - Q_d^2$ και την συνάρτηση προσφοράς με μορφή $P = 2 + 5Q_s^2$.Να υπολογίσετε το πλεόνασμα του παραγωγού και του καταναλωτή.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε το σημείο ισορροπίας θέτοντας

$P_s = P_d \Leftrightarrow 1,946 - Q_d^2 = 2 + 5Q_s^2 \Leftrightarrow 6Q^2 = 1944 \Leftrightarrow Q = 18$.Αντικαθιστώντας η τιμή υπολογίζεται ως P=1622

$$CS = \int_0^{18} \left(1946 - Q^2\right) dQ - P_0 Q_0 = \left[1946Q - \frac{Q^3}{3}\right]_0^{18} - (18*1622) = \left(35028 - 1944\right) - 29196 = 3885$$

Για να υπολογίσουμε το πλεόνασμα του παραγωγού αρκεί να δούμε την θεωρία μας .

$$\Pi S = P_0 Q_0 - \int_0^{18} \left(2 + 5Q^2\right) dQ = 29196 - \left[2Q + \frac{5Q^3}{3}\right]_0^{18} = 29196 - \left(36 + 9720\right) = 19440$$

Άσκηση 8

Οι αποδόσεις ενός επενδυτικού προγράμματος περιγράφονται από την συνάρτηση καθαρής επένδυσης με την μορφή $I(t) = 15000t^{-0.5}$ όπου t είναι κάθε χρόνος για την συγκεκριμένη αξία του προγράμματος. Ποια η αξία αποδόσεων την τέταρτη χρονιά και πως υπολογίζουμε

την δημιουργία κεφαλαίου από το τέλος της πρώτης μέχρι το τέλος της πέμπτης χρονιάς; Τέλος βρείτε τον αριθμό των ετών που χρειάζονται για να συσσωρευτεί ποσό ίσο με 60.000 ευρώ.

ΛΥΣΗ

Για το πρώτο ερώτημα θέλουμε το $I(4) = 15000 * 4^{-0.5} = 7500$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε το εξής ολοκλήρωμα

$$\int_1^5 I(t)dt = \int_1^5 15000t^{-0.5}dt = \left[30000t^{0.5}\right]_1^5 = 30000\left(\sqrt{5}-1\right) = 37082.04$$

Στο τελευταίο ερώτημα ζητείται το εξής:

$$\int_0^T I(t)dt = 60000 \Leftrightarrow \int_0^T 15000t^{-0.5}dt = 6000 \Leftrightarrow 30000\left[t^{0.5}\right]_0^T = 60000$$

$$\Leftrightarrow T^{0.5} = 2 \Leftrightarrow T = 4$$

Άσκηση 9

Εάν η κατανομή του εισοδήματος σε μια χώρα δίνεται από την συνάρτηση $Y = 0.25(3I^2 + I)$ να κατασκευάσετε την αντίστοιχη καμπύλη Lorenz. Να υπολογίσετε το ποσοστό του εθνικού εισοδήματος που λαμβάνει το πιο χαμηλά αμειβόμενο 20% του πληθυσμού και να υπολογιστεί ο συντελεστής ανισοκατανομής Gini.

ΛΥΣΗ

Αντικαθιστώντας έχουμε $Y(0.2) = 0.25(3(0.2)^2 + 0.2) = 0.08$ *(λύση μέσω γραφίδας)*

Άσκηση 10

Να βρεθεί ο πληθυσμός μιας χώρας όταν το σχετικό ποσοστό αύξησης είναι σταθερό και ίσο με k.

ΛΥΣΗ

(λύση μέσω γραφίδας)

Μάθημα Δωδέκατης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 21/12/2020 & Τρίτη 22/12/2020

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{1}^{\beta} x^{-2}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_{1}^{\beta} = \lim_{\beta\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)=1.$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{-1} x^{-1}dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{-\infty}^{-1} x^{-1}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{-1} x^{-1}dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\left[\ln|x|\right]_{\alpha}^{-1} = \lim_{\alpha\to-\infty}\left(\ln|-1|-\ln|a|\right)=-\infty.$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta} xe^{-x}dx = -\lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta} x\left(e^{-x}\right)'dx = \lim_{\beta\to+\infty}\left\{\left[-xe^{-x}\right]_{0}^{\beta}-\int_{0}^{\beta}e^{-x}dx\right\}=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}\left\{\left[-xe^{-x}\right]_{0}^{\beta}+\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\beta}\right\}=\lim_{\beta\to+\infty}\left[\left(-\beta e^{-\beta}\right)+1-e^{-\beta}\right]=\lim_{\beta\to+\infty}\left[1-\frac{\beta+1}{e^{\beta}}\right]=\cdot$$

$$=....=1-\lim_{\beta\to+\infty}\left[\frac{1}{e^{\beta}}\right]=1$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το παρακάτω ολοκλήρωμα $\int_{0}^{1} x^{-2}dx$

ΛΥΣΗ

$$\int_{0}^{1} x^{-2}dx = \lim_{\varepsilon\to0^{+}}\int_{\varepsilon}^{1} x^{-2}dx = \lim_{\varepsilon\to0^{+}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to0^{+}}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)=+\infty$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y=|x-2|, y=-x^2+4x+2$

ΛΥΣΗ

(λύση μέσω γραφίδας)

1) Γραφική απεικόνιση των ευθειών, παραβολών ή άλλων ευθειών που μας ζητείται να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που σχηματίζουν.

2) Εύρεση των κοινών τους σημείων όπου με βάση το (1) να μπορέσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα (-ματα) που μας ζητείται.

3) υπολογισμό του ολοκληρώματος (-των).

Άσκηση 6

Μια επιχείρηση έχει αναλάβει μια επενδυτική δραστηριότητα της οποίας τα έσοδα μεταβάλλονται με ρυθμό $TR'(t)=800-\frac{t^2}{4}$ και τα έξοδα με ρυθμό $TC'(t)=2t^2$. Η υπολειματική αξία του εξοπλισμού που χρησιμοποιείται για την επένδυση μειώνεται με ρυθμό $D(t)=\frac{1}{t+1}$. Για πόσα χρόνια συμφέρει η συνέχιση αυτής της δραστηριότητας και ποια τα συνολικά της κέρδη;

ΛΥΣΗ

Τα συνολικά κέρδη υπολογίζονται ως εξής: $\Pi(t)=TR(t)-TC(t)=\int[TR'(t)-TC'(t)]dt$

Για την περίπτωση όπου υπολογιζόταν στο άπειρο θα είχαμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Για να υπολογίσουμε τον χρόνο θα πρέπει να στηριχθούμε στην εξίσωση MR=MC.Δηλαδή,

$$TR'(t)+D(t)=TC'(t)\Leftrightarrow 800-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{t+1}=2t^2$$

Άσκηση 7

Ένας ενοικιαστής νοικιάζει ένα σπίτι με μηνιαίο ενοίκιο 1000 ευρώ. Ο ιδιοκτήτης ενδιαφέρεται να πουλήσει το σπίτι. Εάν ο ενοικιαστής έχει την δυνατότητα να δανειστεί με ετήσιο επιτόκιο 5% και συνεχή ανατοκισμό ποια η ανώτατη τιμή που θα δεχτεί ώστε να αγοράσει αυτός το σπίτι;.

ΛΥΣΗ

$$PV=\int_0^{+\infty}12000e^{-0.05t}dt$$

Άσκηση 8

Ποια είναι η σημερινή αξία μιας διαρκούς σειράς πληρωμών 50.000 ευρώ ανά έτος με συνεχή ανατοκισμό και προεξοφλητικό επιτόκιο 10%;

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε την αξία θα πρέπει να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος:

$$PV = \int_0^{+\infty} 50000e^{-0.01t}dt = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} 50000e^{-0.01t}dt = 50000\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-0.01t}dt = 500000$$

Άσκηση 9

Έμπορος τέχνης έχει στην κατοχή του ένα σπάνιο πίνακα ενός Ιταλού μεταμοντερνιστή ζωγράφου του οποίου η αξία είναι V(t). Εάν το κόστος αποθήκευσης είναι s χρηματικές μονάδες ανά έτος και το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι i να υπολογίσετε την συνθήκη ώστε ο έμπορος να μπορεί να πωλήσει τον πίνακα.

ΛΥΣΗ

Η συνθήκη πώλησης του πίνακα απαιτεί την μεγιστοποίηση της παρούσας αξίας του.

$$PV(t) = V(t)e^{-it} - \int_0^t se^{-it}dt = V(t)e^{-it} - \frac{s}{i}(1-e^{-it}) = V(t)e^{-it} - \frac{s}{i} + \frac{s}{i}e^{-it} = e^{-it}\left(V(t)+\frac{s}{i}\right) - \frac{s}{i}$$

Αρα θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση ως προς t,

$$\frac{dPV(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\left[e^{-it}\left(V(t)+\frac{s}{i}\right)-\frac{s}{i}\right]}{dt} = 0 \Leftrightarrow e^{-it}\left(\frac{dV(t)}{dt} - iV(t) - s\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dV(t)}{dt} = iV(t) + s$$

Άσκηση 10

Η συνάρτηση οριακού κόστους μιας επιχείρησης είναι MC=3Q+2. Να υπολογίσετε το πλεόνασμα του παραγωγού που αντιστοιχεί στην τιμή P=8 και P=17 και το πλεόνασμα καθώς αυξάνεται από το P=8 στην τιμή P=17.

ΛΥΣΗ

Αρχικά δουλέψτε με τη συνθήκη μεγιστοποίησης όπου P=MC. Με βάση αυτήν και τις διαφορετικές τιμές του P μπορείτε να υπολογίσετε το Q.

(8,37,5 και 31,5)

Άσκηση 11

Το ποσοστό παράδοσης πακέτων κατά την διάρκεια της πανδημίας που πραγματοποιήθηκε σε μια τυχαία πρώτη ημέρα παραδόσεων δίνεται από την συνάρτηση συχνότητας πιθανότητας $P(x)=12\left(x^2-x^3\right), 0\le x\le 1$. Ποια είναι η πιθανότητα α) το 50% της παράδοσης των πακέτων να ολοκληρωθεί σε μια μέρα, β) το 50% ή περισσότερο να ολοκληρωθεί κατά τη διάρκεια της ημέρας.

ΛΥΣΗ

α) $$\Pr\left(0\le x\le 0.5\right)=\int_0^{0.5}P(x)dx=\int_0^{0.5}12\left(x^2-x^3\right)dx=12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{0.5}=$$
$$=\left(4*0.5^3-3*0.5^4\right)=0.3125$$

β) $$\Pr\left(0.5\le x\le 1\right)=\int_{0.5}^{1}P(x)dx=\int_{0.5}^{1}12\left(x^2-x^3\right)dx=12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0.5}^{1}=$$
$$=0.6875$$

$$\int_{\mathbf{C}}^{\mathbf{r}_{-1}^{-0}\mathbf{LA}|_{(t)=-500}}{}_{(-i)=\mathbf{r}_{\tilde{\Xi}}^{(100\cos-50\partial f)-(-500)\Sigma_{\mathbf{V}-}}10000v-500r_f+50}$$

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις $y=\frac{4}{x^2}, y=5-x^2$

ΛΥΣΗ

(λύση μέσω γραφίδας)

Άσκηση 13

Μια επιχείρηση αγοράζει μια μηχανή 10000, η οποία χάνει ετησίως 500 της αξίας της με συνάρτηση A(t)=10000-500t, t>0. Εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι r, τότε το κόστος C(t) διατήρησης της μηχανής είναι ίσο προς τους τόκους rA(t) συν τον ρυθμό μείωσης της αξίας της μηχανής, δηλαδή A'(t) για την οποία έχουμε ότι A'(t)<0 (C(t)=rA(t)-A'(t)). Εάν το επιπλέον κόστος λειτουργίας δίνεται από την συνάρτηση $K(t)=100+9t^2$ και το επιτόκιο είναι 10% να βρείτε:

Α) Το μέσο συνολικό κόστος της μηχανής για μια περίοδο [0,T],

Β) Την βέλτιστη μέση ζωή του μηχανήματος (*χρόνος για τον οποίο μεγιστοποιείται το μέσο συνολικό κόστος*)

ΛΥΣΗ

Μάθημα Δέκατης-Τρίτης Εβδομάδας

Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

Δευτέρα 11/01/2021 & Τρίτη 12/01/2021