

1

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΝ
ΘΕΩΡΗΣΑΜΕ ΟΤΙ X ΠΑΙΡΜΕΙ ΕΓΧΘΕΡΕΣ
ΤΙΜΕΣ ΣΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ
ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ, ΕΝΩ Y ΕΙΝΑΙ
ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ.

ΕΣΤΟ ΤΩΡΑ ΟΤΙ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΦΙΣΤΟ ΝΑ
ΠΡΟΨΑΘΟΡΙΣΟΥΜΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ X
ΚΑΙ ΣΥΜΕΠΟΣ X ΘΑ ΕΙΝΑΙ ΚΑΙ ΑΥΤΗ
ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ.

ΕΣΤΟ ΤΟ ΖΕΥΓΟΣ (X, Y) . ΖΗΤΑΜΕ
ΕΝΑ "ΜΕΤΡΟ ΙΣΧΥΡΟΤΗΤΑΣ" ΤΗΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ X
ΚΑΙ Y . ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΑΥΤΟ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ (ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ) ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ,
ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ρ , ΚΑΙ ΟΡΙΖΕΤΑΙ

$$\rho = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

2

ΟΤΠΟΥ σ_x ΚΑΙ σ_y = ΤΥΠΩΣΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ ΤΩΝ X ΚΑΙ Y ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ,
ΚΑΙ Η ΣΥΝΔΙΑΧΥΜΑΝΣΗ $\text{COV}(X, Y)$
ΕΙΝΑΙ $E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$
ΜΕ $\mu_x = E(X)$ ΚΑΙ $\mu_y = E(Y)$.

ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ $-1 \leq \rho \leq 1$

ΣΤΙΣ ΕΙΔΙΩΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΤΟΥ

$\rho = \pm 1$ ΕΧΟΥΜΕ ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ
ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ. ΑΝ $\rho > 0$ ΤΟΤΕ X ΚΑΙ Y

ΕΙΝΑΙ ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ, ΑΝ
 $\rho < 0$ ΤΟΤΕ X ΚΑΙ Y ΣΕ ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ. ΑΝ $\rho = 0$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ.

(ΠΑΡ ΓΙΑ $\rho < 0$: ΖΗΤΟΥΜΕΝΗ ΠΡΟΣΤΗΤΑ
ΑΓΑΘΟΥ ΚΑΙ ΤΙΜΗ ΑΥΤΟΥ)

(ΠΑΡ ΓΙΑ $\rho > 0$: ΠΡΟΣΦΟΡΑ ~~ΠΡΟΣΤΗΤΑΣ~~
ΑΓΑΘΟΥ ΚΑΙ ΤΙΜΗ ΑΥΤΟΥ)

$\rho =$ ΑΓΝΩΣΤΟ \rightarrow ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΑ ΖΟΥΜΕ
ΕΠΙΤΙΜΗΤΡΟ ΑΤΟΥ ρ
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΥΧΑΙΟ
ΔΕΙΓΜΑ

3

Η ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΑΥΤΗ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ
ΔΕΙΓΜΑΤΙΩΣ ΣΥΝΔΕΛΕΣΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ
ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ, ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΖΕΤΑΙ ΜΕ $\hat{\rho}$.

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

ΓΙΑ ΣΥΓΓΕΩΡΤΙΜΟ ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ
 (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$, Η ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\hat{\rho}$ ΕΙΝΑΙ
↑
«ΜΙΝΡΑ» ΓΡΑΜΜΑΤΑ

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

ΔΗΛΑΔΗ $r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}} \cdot \sqrt{s_{yy}}}$, ΜΕ $-1 \leq r \leq 1$

ΚΑΙ $r^2 = R^2$

* r ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ
Χ ΚΑΙ Y ΕΙΝΑΙ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗ-
ΤΕΣ. ΟΤΩΣ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ
ΤΟΥ R^2 , r ΕΧΕΙ ΤΟ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ
ΟΤΙ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ.

④

ΣΧΕΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΔΕΙΧΝΕΙ
(ΑΛΛΑ ΔΕΝ ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΕΙ) ΤΗΝ ΣΧΕΣΗ ΑΙΤΙΑ-
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

ΜΕΤΑΞΥ ΤΗΣ (ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗΣ) ...

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ X ΚΑΙ ΤΗΣ (ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗΣ) Y .

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΛΗ, Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΝΑ ΚΑΝΕΙ ΜΕ ΘΕΜΑ ΑΙΤΙΑΣ-

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ, ΑΛΛΑ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΜΟΝΟ

ΣΤΗΝ ΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΤΟΝ ΒΑΘΜΟ ΣΧΕΣΗΣ

ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ X ΚΑΙ Y ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ

ΕΙΝΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΕΣ ΕΠΕΙΔΗ ΚΑΠΟΙΑ

ΤΡΙΤΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ

ΚΑΙ ΤΙΣ ΔΥΟ. ΕΝΑ ΠΡΑΚΤΙΚΩ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ: ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΟΥ ΓΙΟΥ ΚΑΙ

ΑΥΤΟ ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΕΧΟΥΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

ΣΧΕΣΗ ΑΙΤΙΑΣ-ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ, ΟΜΟΣ

ΑΝ X = ΥΨΟΣ ΑΔΕΛΦΟΥ ΚΑΙ Y = ΥΨΟΣ ΑΔΕΛΦΗΣ

ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΘΕΩΡΗΣΟΥΜΕ ΟΤΙ

ΜΙΑ ΣΥΓΧΕΙΡΩΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ X ΕΙΝΑΙ

5

ΑΙΤΙΑ ΓΙΑ ΜΙΑ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ρ ΔΙΟΤΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ
ΑΥΤΕΣ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ
"ΓΟΜΒΕΙΣ". ΕΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΗ ΔΕΝ
ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ, ΑΛΛΑ ΜΟΝΟ ΕΥΣΧΕΤΙΣΗ
ΟΣ ΜΕΤΡΟ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ
ΤΟΝ X ΚΑΙ Y . ΑΥΤΟΣ Ο ΒΑΘΜΟΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗΣ
ΔΙΝΕΤΑΙ ΚΑΙ ΕΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗ-
ΣΗΣ ΑΠΟ R^2 .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ρ

ΕΣΤΟ ΟΤΙ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ΕΙΝΑΙ
ΤΥΧΑΙΟ ΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
ΚΑΤΑΝΟΜΗ, ΚΑΙ ΟΤΙ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ
ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ:

$$H_0: \rho = 0 \rightarrow (X \text{ ΚΑΙ } Y \text{ ΑΕΥΣΧΕΤΙΣΤΕΣ} \\ X \text{ ΚΑΙ } Y \text{ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ})$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

ΥΠΟ H_0 , Η ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ t

$$\text{ΜΕ } t_0 = \hat{\rho} \sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{\rho}^2}} \sim t_{n-2} \text{ STUDENT}$$

6

ΑΥΤΟ ΙΣΧΥΕΙ ΔΙΟΤΙ ΑΝ ΑΝΤΙΛΗΨΑΘΕΤΗ-
ΣΟΥΜΕ $\hat{\rho}$ ΜΕ $\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\sqrt{S_{yy}}}$, ΒΡΙΣΘΟΥΜΕ

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{S_{y|x}/S_{xx}}} = t_0 \text{ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΛΕΙΤΑΙ ΓΙΑ}$$

ΕΛΕΓΧΟ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ Β
ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

ΔΗΛΑΔΗ Ο ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΙΑΣ
ΣΤΗ ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ ΜΕ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΗΣ
ΥΠΟΘΕΣΗΣ $\beta=0$ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ.

* ΣΗΜΕΙΩΣΤΕ ΟΤΙ ΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΩΝ
 r ΚΑΙ b ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑ.

ΠΑΡ: ΝΕΡΟ - ΣΟΔΕΙΑ (ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ Χ
ΕΙΝΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΑ)

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho \neq 0$$

ΕΠ. ΣΗΜ $\alpha = 10\%$

ΚΡΙΣΙΜΗ ΤΙΜΗ

$$t_{5, 0.95} = 2.57$$

$$\text{ΕΙΧΑΜΕ ΒΡΕΙ } R^2 \approx 0.946$$

$$\text{ΚΑΙ } b = 0.1 > 0$$

ΣΥΜΕΠΡΕΣ $r > 0$ ΚΑΙ

$$r = \sqrt{0.946} = 0.97$$

r "ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ" ΣΤΟ 1 \Rightarrow ΠΕΡΙΜΕΝΟΥ-
ΜΕ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ
ΣΧΕΣΗ. ΑΥΤΟ ΕΠΑΛΗΘΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ
ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ