ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΔΥΟ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Όταν ενδιαφερόμαστε να συγκρίνουμε δύο πληθυσμούς, η φυσιολογική προσέγγιση είναι να προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές ή τις τιμές κάποιου άλλου μέτρου θέσης των δύο αυτών πληθυσμών.

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει μέχρι τώρα, η στατιστική διαδικασία που ενδείκνυται είναι ο έλεγχος στατιστικών υποθέσεων που θα αναφέρεται στις μέσες τιμές, ή κάποιες αναλογίες, των δύο υπό μελέτη πληθυσμών.

Η μεθοδολογία αυτή αποτελεί μια επέκταση των όσων έχουμε δει μέχρι τώρα για ελέγχους υποθέσεων ενός πληθυσμού.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΔΥΟ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε τα εξής:
Αν έχουμε δύο κανονικούς πληθυσμούς με παραμέτρους (μ_X, σ_X^2) και (μ_Y, σ_Y^2) αντίστοιχα, οι υποθέσεις που ενδεχομένως ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε μπορεί να έχουν την παρακάτω μορφή,

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad (\mu \equiv \mu_X - \mu_Y = 0)$$

$$H_1: \mu_X<\mu_Y \ (\mu<0) \qquad H_1: \mu_X\neq\mu_Y \ (\mu\neq 0) \qquad H_1: \mu_X>\mu_Y \ (\mu>0)$$

όπου $\mu = \mu_X - \mu_Y$.
Αυτές είναι οι δυνατές περιπτώσεις για ελέγχους απλών υποθέσεων.
Για την περίπτωση συνθέτων υποθέσεων θα έχουμε τις περιπτώσεις,

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \ (\mu \geq 0) \qquad H_0 : \mu_X \leq \mu_Y \ (\mu \leq 0)$$

$$H_1 : \mu_X < \mu_Y \ (\mu < 0) \qquad H_1 : \mu_X > \mu_Y \ (\mu > 0)$$

Η επιλογή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου συνδέεται με το κατά πόσον τα τυχαία δείγματα που θα χρησιμοποιηθούν είναι ανεξάρτητα ή οι παρατηρήσεις τους ενός "συνδέονται" με τις παρατηρήσεις του άλλου. Όπως και στο πρόβλημα της σύγκρισης μέσων τιμών πληθυσμών μέσω διαστημάτων εμπιστοσύνης, κάνουμε διάκριση των δύο αυτών περιπτώσεων στην συνέχεια. Συγκεκριμένα, οι τέσσερις πρώτες ενότητες που ακολουθούν (Α, Β, Γ, Δ) βασίζονται στην χρησιμοποίηση ανεξαρτήτων δειγμάτων, ενώ η πέμπτη (Ε) ενότητα στην χρησιμοποίηση δειγμάτων που έχουν μια συγκεκριμένη μορφή εξάρτησης (οι παρατηρήσεις επιλέγονται κατά ζεύγη).

Α. Περίπτωση Γνωστών Διακυμάνσεων *(Ανεξάρτητα Δείγματα)*

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει μέχρι τώρα, ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε στην περίπτωση αυτή είτε την συνάρτηση $\overline{X}-\overline{Y}$ (που είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια της διαφοράς μ_X - μ_Y) είτε, ισοδύναμα, την αντίστοιχη τυποποιημένη συνάρτηση,

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/n+\sigma_Y^2/m}}$$

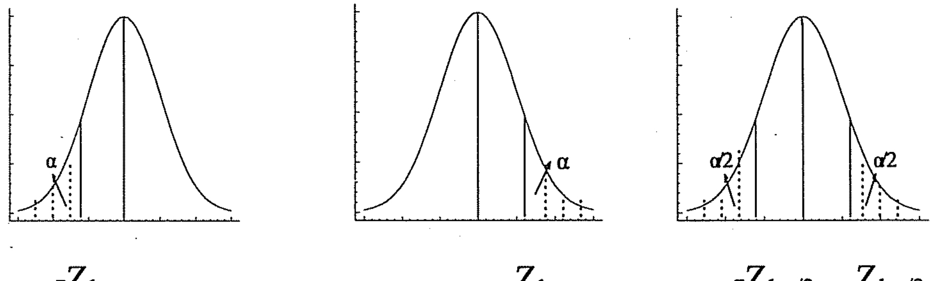
Κάτω από την μηδενική υπόθεση, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου θα γίνει,

$$Z_0=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/n+\sigma_Y^2/m}}$$

Έτσι, για τις διάφορες περιπτώσεις των εναλλακτικών υποθέσεων, όπως προκύπτει και από τα σχήματα που ακολουθούν, έχουμε

$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$

$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$ $\quad$ $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$ $\quad$ $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$



$-Z_{1-\alpha}$ $\quad$ $Z_{1-\alpha}$ $\quad$ $-Z_{1-\alpha/2}$ $\quad$ $Z_{1-\alpha/2}$

Συγκεκριμένα,

α) Αν H_1: $\mu = \mu_X - \mu_Y < 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$Z_0 < -Z_{1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -Z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$$

β) Αν H_1 : $\mu = \mu_X - \mu_Y > 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$Z_0 > Z_{1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} > Z_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$$

γ) Αν H_1: $\mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$Z_0 < -Z_{1-\alpha} \quad \text{ή} \quad Z_0 > Z_{1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m} \text{ ή } \overline{X} - \overline{Y} > Z_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}$$

Σημείωση 1: Η έννοια του παρατηρούμενου επιπέδου σημαντικότητας (της τιμής p) επεκτείνεται και στην περίπτωση αυτή με προφανή τρόπο.

Σημείωση 2: Στην περίπτωση συνθέτων υποθέσεων [H_0: $\mu_X \geq \mu_Y$ ($\mu \geq 0$) ή H_0: $\mu_X \leq \mu_Y$ ($\mu \leq 0$)], οι έλεγχοι γίνονται με τον ίδιο τρόπο με την διαφορά ότι, όπως και στους ελέγχους που αναφέρονται σε έναν πληθυσμό που εξετάσαμε, ο ορισμός του α και της p-τιμής αναφέρεται στο μέγιστο των πιθανοτήτων που ορίζουν τις έννοιες αυτές στις απλές υποθέσεις ως προς τις διάφορες τιμές του $\mu_X - \mu_Y$ κάτω από την μηδενική υπόθεση.

B. Περίπτωση Αγνώστων Ίσων Διακυμάνσεων ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$)

(Ανεξάρτητα Δείγματα)

Ακολουθώντας την διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε στα διαστήματα εμπιστοσύνης, κάνουμε χρήση της σταθμισμένης εκτιμήτριας της διασποράς S_p^2.

Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου θα είναι και πάλι η $\overline{X}-\overline{Y}$ ή ισοδύναμα, η

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_p^2/n+S_p^2/m}}$$

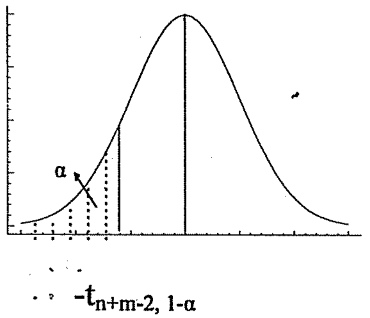
η οποία, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, γίνεται

$$T_0=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_p^2/n+S_p^2/m}}$$

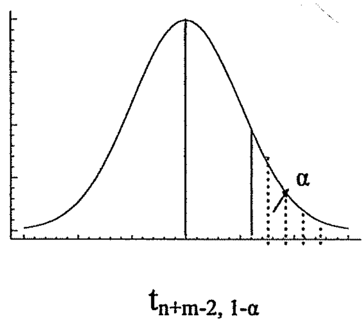
Έτσι, για τις τρεις μορφές εναλλακτικής υπόθεσης γράφουμε, όπως προκύπτει και από τα σχήματα που ακολουθούν,

$$H_0 : \mu = \mu_X - \mu_Y = 0$$

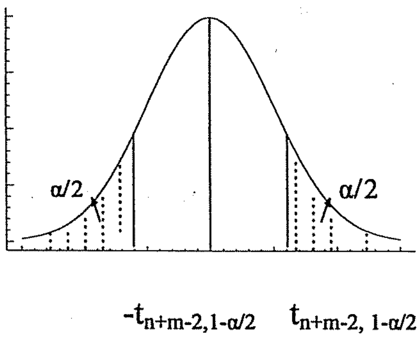
$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$



$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$



$H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$



Για κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές έχουμε αντίστοιχα, α) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 < -t_{n+m-2,\,1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -t_{n+m-2,1-\alpha}\sqrt{S_p^2/n + S_p^2/m}$$

β) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 > t_{n+m-2,\,1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} > t_{n+m-2,1-\alpha}\sqrt{S_p^2/n + S_p^2/m}$$

γ) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 < -t_{n+m-2,\,1-\alpha/2} \quad \text{ή} \quad T_0 > t_{n+m-2,\,1-\alpha/2}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -t_{n+m-2,1-\alpha/2}\sqrt{S_p^2/n + S_p^2/m} \qquad \text{ή}$$

$$\overline{X} - \overline{Y} > t_{n+m-2,1-\alpha/2}\sqrt{S_p^2/n + S_p^2/m}$$

Σημείωση: Η προηγηθείσα συμπερασματολογία ισχύει έστω και αν οι υπό μελέτη πληθυσμοί δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή με την προϋπόθεση ότι τα μεγέθη των δειγμάτων από τους δύο πληθυσμούς είναι αρκετά μεγάλα.

Γ. Περίπτωση Αγνώστων Ανίσων Διακυμάνσεων $(\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2)$

Μεγάλα (Ανεξάρτητα) Δείγματα

Όπως και στα διαστήματα εμπιστοσύνης, αν τα μεγέθη n και m των δειγμάτων είναι μεγάλα, χρησιμοποιούμε τις εκτιμήτριες S_X^{*2} και S_Y^{*2} των διακυμάνσεων σ_X^2 και σ_Y^2 των δύο πληθυσμών (αντίστοιχα τις S_X^2, S_Y^2) και αξιοποιούμε το γεγονός ότι, για μεγάλα δείγματα, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_X^{*2}/n+S_Y^{*2}/m}}$$

$$=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_X^2/(n-1)+S_Y^2/(m-1)}}$$

ακολουθεί, σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, κατά προσέγγιση την N(0,1) κατανομή και, επομένως, κάτω από την μηδενική υπόθεση, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου θα είναι

$$Z_0=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^{*2}/n+S_Y^{*2}/m}}$$

$$=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2/(n-1)+S_Y^2/(m-1)}}$$

Οι έλεγχοι γίνονται όπως και στην περίπτωση Α.

Δ. Περίπτωση Αγνώστων Ανίσων Διακυμάνσεων ($\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$)

Μικρά (Ανεξάρτητα) Δείγματα

Όταν τα δεδομένα του προβλήματος δεν επιτρέπουν την υπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων των πληθυσμών ούτε είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν μεγάλα δείγματα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καμμία από τις μεθόδους που αναπτύξαμε προηγουμένως. Στην περίπτωση αυτή, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα που στη Στατιστική ονομάζεται πρόβλημα των Behrens-Fisher.

Όπως είδαμε και στην ανάπτυξη της θεωρίας των διαστημάτων εμπιστοσύνης, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται και πάλι η στατιστική συνάρτηση

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_X^{*2}/n+S_Y^{*2}/m}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{S_X^2/(n-1)+S_Y^2/(m-1)}}$$

που, όμως στην περίπτωση αυτή, έχει βαθμούς ελευθερίας

$$v \approx \frac{\left(S_X^{*2}/n + S_Y^2/m\right)^2}{\frac{\left(S_X^2/n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(S_Y^2/m\right)^2}{m-1}}$$

Ο αριθμός ν είναι πάντοτε μικρότερος ή ίσος από το n+m-2, από τον αριθμό δηλαδή των βαθμών ελευθερίας που χρησιμοποιούμε στην συνήθη στατιστική συνάρτηση t με την σταθμισμένη διασπορά. Προφανώς, όσο τα μεγέθη των δειγμάτων αυξάνουν το ν αυξάνει επίσης και η κατανομή t συγκλίνει προς την κανονική κατανομή, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατά προσέγγιση την μέθοδο που αναπτύξαμε προηγουμένως.

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται πολλές φορές και προσέγγιση του Satterthwaitt.

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, ο κανόνας απόφασης διαμορφώνεται ως εξής:

α) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y < 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 < -t_{v,\,1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -t_{v,1-\alpha}\sqrt{S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m}$$

β) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y > 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 > t_{v,\,1-\alpha}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} > t_{v,1-\alpha}\sqrt{S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m}$$

γ) Αν $H_1 : \mu = \mu_X - \mu_Y \neq 0$, τότε απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$T_0 < -t_{v,\,1-\alpha/2} \quad \text{ή} \quad T_0 > t_{v,\,1-\alpha/2}$$

ή, ισοδύναμα, αν

$$\overline{X} - \overline{Y} < -t_{v,1-\alpha}\sqrt{S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m} \qquad \text{ή}$$

$$\overline{X} - \overline{Y} > t_{v,1-\alpha}\sqrt{S_X^{*2}/n + S_Y^{*2}/m}$$

όπου ν δίνεται από τον τύπο που προηγήθηκε.