1

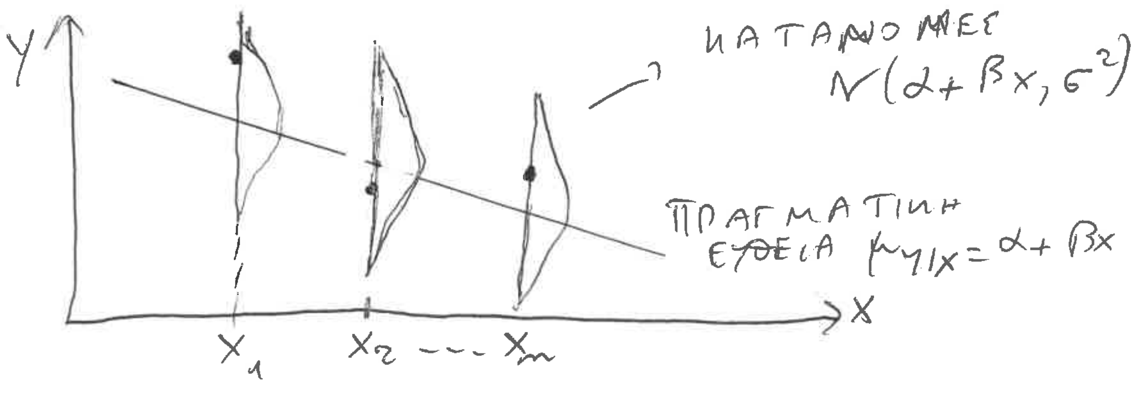
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

a ΚΑΙ b ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΕΙΑΚΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΤΩΝ α ΚΑΙ β. ΘΕΛΟΥΜΕ ΤΩΡΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΟΥΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ (Δ.Ε) ΓΙΑ α, β ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΛΕΓΧΟΥΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ —, ΧΡΕΙΑΖΩΜΑΣΤΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΙΑ $\hat{\alpha}$ ΚΑΙ $\hat{\beta}$.

ΚΛΑΣΙΚΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ: ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΣΤΙΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΛΑΣΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ: $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ ΓΙΑ $\forall i$

ΔΗΛΑΔΗ $Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$

ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ Y ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΝ N ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΓΙΑ $\forall$ ΤΙΜΗ ΤΟΥ X.



② *ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ΤΑ ΚΑΤΑΛΟΙΠΑ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΔΙΟΤΙ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΘΕΩΡΗΘΟΥΝ ΩΣ ΜΕΣΟΙ ΛΑΘΩΝ ΑΠΟ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΠΗΓΕΣ ΟΠΟΥ ΚΑΜΙΑ ΔΕΝ ΥΠΕΡΕΧΕΙ, ΚΑΙ ΟΤΑΝ ΤΑ ΛΑΘΗ ΑΥΤΑ ΕΙΝΑΙ ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΑ ΣΕ ΑΡΙΘΜΟ, ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΙ ΤΟ Κ.Ο.Θ.

- Η ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΟΜΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΠΑΙΤΕΙ ΣΤΑΘΕΡΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ X

- ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΚΑΤΑΛΟΙΠΩΝ: ΣΥΝΗΘΩΣ ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΓΙΑ ΤΙΜΕΣ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

- ΓΙΑ β:

ΕΧΟΥΜΕ $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_1^n (x_i - \bar{x}) Y_i}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}$

ΕΣΤΩ $c_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{x_i - \bar{x}}{S_{xx}}$

$\rightarrow \hat{\beta} = \sum_1^n c_i Y_i$

ΑΦΟΥ $Y_i \sim N$ ΤΟΤΕ ΚΑΙ $\hat{\beta} \sim N$ (ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ Τ.Μ. ΠΟΥ $\sim N$)

③

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\sum_1^n c_i Y_i\right) = \sum_1^n c_i E(Y_i) = \alpha \sum_1^n c_i + \beta \sum_1^n c_i X_i$$

ΟΜΩΣ $\sum_1^n c_i = 0$ (ΚΛΑΣΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

ΚΑΙ
$$\sum_1^n c_i x_i = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x}) x_i}{S_{xx}} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x} + \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}}_{=1} + \bar{x} \underbrace{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})}{S_{xx}}}_{=0}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

ΣΥΝΕΠΩΣ $E(\hat{\beta}) = \beta$ ΕΤΣΙ $\hat{\beta}$: ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ β.

ΜΕ ΤΟΝ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ

$$VAR(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

$\rightarrow \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right)$ ΑΝ ΓΝΩΡΙΖΑΜΕ σ^2 ΤΟΤΕ ΕΝΑ $100(1-\alpha)\%$

ΚΑΙ $\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma / \sqrt{S_{xx}}} \sim N(0,1) \rightarrow$ Δ.Ε. ΓΙΑ β: $\hat{\beta} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{S_{xx}}}$

ΣΥΝΗΘΩΣ σ ΕΙΝΑΙ ΑΓΝΩΣΤΗ ΚΑΙ ΕΚΤΙΜΑΤΑΙ ΑΠΟ $S^*_{Y|x}$, ΜΕ $S^{*2}_{Y|x} = \frac{\sum_1^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$ (ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ),

ΔΗΛΑΔΗ $S^{*2}_{\hat{\beta}} = \frac{S^{*2}_{Y|x}}{S_{xx}}$ (Ή $S^*_{\hat{\beta}} = \frac{S^*_{Y|x}}{\sqrt{S_{xx}}}$)

ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ $\hat{\beta}$.

④

ΕΝΑΣ ΑΛΛΟΣ ΠΙΟ ΕΥΧΡΗΣΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΝΑ

· ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΙ $S_{\hat{\beta}}^{*2}$ ΕΙΝΑΙ

$$S_{\hat{\beta}}^{*2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right)$$

ΚΑΙ ΑΦΟΥ $b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$

$$\rightarrow S_{\hat{\beta}}^{*2} = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - b S_{xy}\right)$$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{S_{y|x}^{*2}/S_{xx}}} \sim t_{n-2} \quad (\text{STUDENT } t)$$

$$\left(\frac{\left(\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}\right)}{\sqrt{\frac{(n-2)S_{y|x}^{*2}}{\sigma^2}/(n-2)}}\right)$$

ΣΥΝΕΠΩΣ ΕΝΑ $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ ΓΙΑ β:

$$\boxed{\hat{\beta} \pm t_{n-2,\,1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S_{y|x}^{*2}/S_{xx}}}$$

• ΓΙΑ α

ΜΕ ΙΔΙΟ ΤΡΟΠΟ ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΓΙΑ β.

ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΟΤΙ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x}$ ΚΑΙ $\hat{\beta} = \sum_1^n c_i Y_i$

$$\rightarrow \hat{\alpha} = \bar{Y} - \left(\sum_1^n c_i Y_i\right)\bar{x} = \sum_1^n \frac{1}{n} Y_i - \sum_1^n c_i \bar{x} Y_i$$

$$= \sum_1^n \left(\frac{1}{n} - c_i\bar{x}\right) Y_i = \sum_1^n k_i Y_i$$

ΜΕ $k_i = \frac{1}{n} - c_i\bar{x}$

(5)

ΔΗΛΑΔΗ $\hat{\alpha}$ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ Τ.Μ. $\Rightarrow \hat{\alpha} \sim N$

$$E(\hat{\alpha}) = E(\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x}) = E(\bar{Y}) - \bar{x}E(\hat{\beta}) = \alpha + \beta\bar{x} - \bar{x}\beta$$
$$= \alpha$$

$\rightarrow \hat{\alpha}$ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ α

ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $VAR(\hat{\alpha}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)$

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)\right)$$

$$\rightarrow \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim N(0,1)$$

ΣΥΝΗΘΩΣ $\sigma^2 =$ ΑΓΝΩΣΤΟ $\rightarrow$ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ $S_{Y|x}^{*2}$

$$\rightarrow \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{S_{Y|x}^{*2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}$$

ΚΑΙ ΕΝΑ $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε ΓΙΑ α:

$$\hat{\alpha} \pm t_{n-2,\,1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S_{Y|x}^{*2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}$$

(6)

ΓΙΑ $\mu_{Y|x}$ (ΠΑΡ: ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΠΡΟΒΛΕΨΟΥΜΕ ΤΑ ΕΞΟΔΑ ΓΙΑ ΣΥΝΟΛΟ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ)

ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$

ΚΑΙ ΑΠΟ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

ΕΧΟΥΜΕ $\hat{y} = \underbrace{(\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x})}_{\alpha} + \hat{\beta} x$

$$= \bar{y} + \hat{\beta}(x - \bar{x})$$

$$E(\hat{y}) = E(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x) = E(\hat{\alpha}) + x E(\hat{\beta}) = \alpha + \beta x$$
$$= \mu_{Y|x}$$

$\Rightarrow \hat{y}$ ΑΜΕΡΟΛΗΠΤΗ ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΑ ΤΗΣ $\mu_{Y|x}$

ΚΑΙ

$$VAR(\hat{y}) = VAR(\bar{y}) + (x - \bar{x})^2 VAR(\hat{\beta})$$

(ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ ΟΤΙ $cov(\bar{Y}, \hat{\beta}) = 0$)

$$\rightarrow VAR(\hat{y}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2 \sigma^2}{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2 \sigma^2}{S_{xx}}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\sum_1^n (x - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)$$

$$\rightarrow \hat{y} \sim N\left(\mu_{Y|x}, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right) \right)$$

$$\rightarrow \frac{\hat{y} - \mu_{Y|x}}{\sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}} \sim N(0, 1)$$

(7)

→ $$\frac{\hat{y}-\mu_{y|x}}{\sqrt{S^{*2}_{y|x}\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}$$

→ ΕΝΑ $100(1-\alpha)\%$ ΔΕ ΓΙΑ $\mu_{y|x}$ ΕΙΝΑΙ

$$\boxed{\hat{y} \pm t_{n-2,\,1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{S^{*2}_{y|x}\left(\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}}$$

ΠΑΡ. ΝΕΡΟΥ – ΣΟΔΕΙΑΣ

$$S^{*2}_{y|x} = \frac{1}{5}\left(11.28 - \frac{(103.65)^2}{1008}\right) = 0.122 \to S^{*}_{y|x} = 0.349$$

ΣΧΕΤΙΚΑ "ΜΙΚΡΗ" ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

→ "ΚΑΛΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ" ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

90% Δ.Ε. ΓΙΑ β:

$$b \pm t_{5,0.95}\sqrt{\frac{0.122}{1008}}$$

ΚΑΙ $b = 0.10$, $t_{5,0.95} = 2.015$

$\Leftrightarrow$ ΔΕ $= [0.08, 0.12]$

ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ, ΓΙΑ α:

$[3.382, 4.718]$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ: ΑΦΟΥ $0 \notin [0.08, 0.12]$

Χ ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ Υ (ΥΠΑΡΧΕΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣ ΜΕΤΑΞΥ Χ ΚΑΙ Υ)

(8)

90% ΔΕ ΓΙΑ $\mu_{Y|X=30}$

$\hat{y} = 4 + (0.1)30 = 7$ $\quad$ ($y = 7.21$ ΑΠΟ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ)

$$7 \pm t_{5,0.95} \sqrt{0.122\left(\frac{1}{7} + \frac{(30-30)^2}{1008}\right)}$$

$$= 7 \pm 0.266 = [6.734, 7.266]$$

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΙΔΙΕΣ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ → ΚΛΑΣΙΚΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

ΓΙΑ β

$H_0: \beta = \beta_0$

ΥΠΟ H_0 Η ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΕΛΕΓΧΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΕΙΝΑΙ $t_0 = \dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{S_{Y|x}^{*2}/S_{xx}}}$

(ΚΑΙ $t = \dfrac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{S_{Y|x}^{*2}/S_{xx}}} \sim t_{n-2}$)

ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

$H_1: \beta > \beta_0$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΥΜΕ H_0 ΣΕ ΕΠ. ΣΗΜ. α ΑΝ $t_0 > t_{n-2,1-\alpha}$

⑨

$H_1: \beta < \beta_0$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΥΜΕ H_0 ΑΝ $t_0 < -t_{n-2,1-\alpha}$

$H_1: \beta \neq \beta_0$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΟΥΜΕ H_0 ΑΝ $t_0 > t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$

Ή

ΕΠ. ΣΗΜ. α $\qquad$ $t_0 < -t_{n-2,1-\frac{\alpha}{2}}$

ΣΥΝΗΘΩΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΜΑΣΤΕ ΓΙΑ $\beta_0 = 0$

ΓΙΑ ΠΑΡ. ΝΕΡΟΥ-ΣΟΔΕΙΑΣ: (ΕΠ. ΣΗΜ 10%)

$H_0: \beta = 0$

$H_1: \beta \neq 0$

$$t_0 = \frac{b-0}{\sqrt{S^{*2}_{y/x}/S_{xx}}} = \frac{0.10}{0.011} = 9.1$$

(ΠΟΙΑ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΜΕΤΑΞΥ $\hat{\beta}$ ΚΑΙ b;)

$t_{5,0.975} = 2.57$

$t_0 > 2.57 \Rightarrow$ ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ H_0 ΣΕ ΕΠ. ΣΗΜ. 10%

$\Rightarrow$ X ΕΠΗΡΕΑΖΕΙ Y. (ΥΠΑΡΧΕΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ)

(ΙΔΙΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΜΕ ΑΥΤΟ ΑΠΟ Δ.Ε).

ΕΛΕΓΧΟΣ (ΓΙΑ α ΙΔΙΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΜΕ β) $\left(t = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{S^{*2}_{y/x}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2}\right)$

$H_0: \alpha = 3.5$ $\qquad$ $\alpha = 10\%$

$H_1: \alpha \neq 3.5$

$$t_0 = \frac{a-3.5}{\sqrt{S_a^{*2}}} \quad \text{ΜΕ} \quad S_a^* = \sqrt{S^{*2}_{y/x}\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right)} = \sqrt{0.1264} = 0.355$$

$$\Leftrightarrow t_0 = \frac{4-3.5}{0.355} = 1.4$$

(10)

$-t_{5,0.95} < t_0 = 1.4 < t_{5,0.95}$ $\quad (t_{5,0.95} = 2.015)$

$\Rightarrow$ ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΑΠΟΡΡΙΨΟΥΜΕ ΤΗΝ H_0 ΣΕ ΕΠΙ. ΣΗΜ. 10%

ΣΤΑ Δ.Ε. ΕΙΧΑΜΕ ΒΡΕΙ 90% Δ.Ε ΓΙΑ $\alpha = [3.382, 4.718]$. ΑΦΟΥ Η ΤΙΜΗ $3.5 \in$ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΑΥΤΟ ΔΕΝ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΜΕ ΝΑ ΑΠΟΡΡΙΨΟΥΜΕ H_0

$\rightarrow$ ΙΔΙΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ΜΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ Ε.Υ.

ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ ΝΑ ΚΑΝΕΤΕ ΕΛΕΓΧΟ ΓΙΑ

$H_0: \mu_{Y|x=30} = 7.5$ ΕΝΑΝΤΙ $H_1: \mu \neq 7.5$

ΙΔΙΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΜΕ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΣΤΕ $\alpha = 10\%$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: ΕΙΧΑΜΕ ΒΡΕΙ 90% ΔΕ ΓΙΑ $\mu_{Y|x=30}$: $[6.734, 7.266]$.

ΑΦΟΥ $7.5 \notin$ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΑΥΤΟ ΠΕΡΙΜΕΝΟΥΜΕ Ο Ε.Υ ΝΑ ΑΠΟΡΡΙΨΕΙ H_0.

$$\left(t = \frac{\hat{Y} - \mu_{Y|x}}{\sqrt{S^{*2}_{Y|x}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}} \sim t_{n-2} \right)$$