Ασκήσεις στο Μάθημα Στατιστική 2 - Έλεγχοι Υποθέσεων

Α. Λαδάς (a_ladas@upatras.gr)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

10/5/2022

Άσκηση 1

Έστω ότι μια βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικών λαμπτήρων ενδιαφέρεται να εξετάσει αν συνεχίζει να ισχύει ο ισχυρισμός που αναγράφει στη συσκευασία για τους λαμπτήρες συγκεκριμένου τύπου που παράγει, ότι ο μέσος χρόνος ζωής τους είναι 1600 ώρες. Για το λόγο αυτό, οι υπεύθυνοι συλλέγουν τ.δ. 100 λαμπτήρων συγκεκριμένου τύπου και υπολογίζουν ότι ο μέσος χρόνος ζωής αυτών των λαμπτήρων είναι 1570 ώρες. Υποθέτοντας ότι η τ.μ. της διάρκειας ζωής των λαμπτήρων ακολουθεί κανονική κατανομή, να ελεγχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας 5% ο ισχυρισμός των υπευθύνων, αν γνωρίζουν από προηγούμενες έρευνες ότι η τυπική απόκλιση του χρόνου ζωής των λαμπτήρων είναι 120 ώρες.

Λύση Άσκησης 1

Ενδιφέρομαι να εκτελέσω έναν δίπλευρο έλεγχο υποθέσεων για το μέσο χρόνο ζωής (μ) των λαμπτήρων συγκεκριμένου τύπου, γνωρίζοντας τα εξής:

- Κανονική Κατανομή
- Πληθυσμιακή Διακύμανση σ^2
- Μέγεθος Δείγματος (n)

Ορίζω τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση ως εξής:

1.Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση του δίπλευρου ελέγχου για το μέσο χρόνο ζωής (μ) των λαμπτήρων

- $H_0 : \mu = 1600$
- $H_1 : \mu \neq 1600$

Συνέχεια

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω την εξής ελεγχοσυνάρτηση:

2.Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης ελέγχου για το μέσο χρόνο ζωής (μ) των λαμπτήρων

$$TS = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{1}$$

Κάνοντας χρήση του τύπου (1) υπολογίζω την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης
$TS = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1570-1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2,5.$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $\alpha = 0.05$, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $1 - \alpha/2 = 0.975$.

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον εξής κανόνα απόρριψης:

3.Κανόνας απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης του δίπλευρου ελέγχου για το μέσο χρόνο ζωής (μ) των λαμπτήρων

$$TS > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{2}$$

ή

$$TS < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

Συνέχεια

Έχουμε υπολογίσει τα εξής:
$TS = -2.5$ και $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{0.975} = 1.96$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 4, σε απόλυτη τιμή η TS είναι μεγαλύτερη από το $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ($|TS| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$), οπότε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση.
Άρα, έχουμε αρκετά ισχυρές ενδείξεις ότι η μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων συγκεκριμένου τύπου που παράγει η βιομηχανία είναι σημαντικά διαφορετική από 1600 ώρες, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Άσκηση 2

Έστω ότι η κατανομή του εισοδήματος σε δυο διαφορετικές χώρες (χώρα Χ και χώρα Υ), ακολουθεί Κανονική Κατανομή Χ$\sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ και Υ$\sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y)$.
Επιλέγουμε τ.δ. 250 ατόμων από τη χώρα Χ και 80 ατόμων από τη χώρα Υ αντίστοιχα, και υπολογίζουμε τα εξής στοιχεία:

$\bar{x} = 320$	$\bar{y} = 250$
$s_x^{*2} = 30$	$s_y^{*2} = 22$
$n_x = 250$	$n_y = 80$

Να ελεγχθεί η υπόθεση ισότητας των μέσων εισοδημάτων για τις δυο χώρες **σε όλες τις περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν**, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Λύση Άσκησης 2

Πρώτη Περίπτωση: Άγνωστες αλλά Ίσες Πληθυσμιακές Διακυμάνσεις

Ενδιφέρομαι να εκτελέσω έναν δίπλευρο έλεγχο υποθέσεων για τη διαφορά των μέσων εισοδημάτων (μ_x - μ_y) των δυο χωρών, γνωρίζοντας τα εξής:

- Κανονική Κατανομή για Χ και Υ
- Πληθυσμιακές Διακυμάνσεις σ_x^2 και σ_y^2
- Μέγεθος Δείγματος (n_x και n_y)

Ορίζω τη μηδενική και την εναλλακτική υπόθεση ως εξής:

1.Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση του δίπλευρου ελέγχου για τη διαφορά των μέσων εισοδημάτων των δυο χωρών (μ_x - μ_y)

- $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$
- $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq 0$

Συνέχεια

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω την εξής ελεγχοσυνάρτηση:

2.Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης ελέγχου για τη διαφορά των μέσων δυο πληθυσμών

$$TS = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_x} + \frac{s_p^2}{n_y}}} \tag{5}$$

όπου

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^{*2} + (n_y - 1)s_y^{*2}}{n_x + n_y - 2} \tag{6}$$

Συνέχεια

Κάνοντας χρήση του τύπου (6) υπολογίζω την τιμή της διακύμανσης

$$s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^{*2} + (n_y - 1)s_y^{*2}}{n_x + n_y - 2} = \frac{(250 - 1)30 + (80 - 1)22}{250 + 80 - 2} \cong 28$$

Κάνοντας χρήση του τύπου (5) υπολογίζω την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης

$$TS = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_x} + \frac{s_p^2}{n_y}}} = \frac{320 - 250}{\sqrt{\frac{28}{250} + \frac{28}{80}}} = 102.98$$

Συνέχεια

Γνωρίζουμε ότι $\alpha = 0.05$, άρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $1 - \alpha/2 = 0.975$.

Από τις πληροφορίες που έχω διαθέσιμες, μπορώ να χρησιμοποιήσω τον εξής κανόνα απόρριψης:

3.Κανόνας απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης του δίπλευρου ελέγχου για τη διαφορά των μέσων εισοδημάτων των δυο χωρών

$$TS > t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{7}$$

ή

$$TS < -t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{8}$$

$\Leftrightarrow$

$$|TS| > t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{9}$$

Συνέχεια

Έχουμε υπολογίσει τα εξής:
$TS = 102.98$ και
$t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{250+80-2,1-\frac{0.05}{2}} = t_{328,0.975} = 1.96$.
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 9, σε απόλυτη τιμή η TS είναι (πολύ) μεγαλύτερη από το $t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ($|TS| > t_{n_x+n_y-2,1-\frac{\alpha}{2}}$), οπότε μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση.
Άρα, έχουμε αρκετά ισχυρές ενδείξεις ότι το μέσο εισόδημα της χώρας X δεν είναι ίσο με το μέσο εισόδημα της χώρας Y, σε επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Συνέχεια

Δεύτερη Περίπτωση: Άγνωστες και Άνισες Πληθυσμιακές Διακυμάνσεις

Εξάσκηση

Συνέχεια

Περίγραμμα Επίλυσης

1.Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση του δίπλευρου ελέγχου για τη διαφορά των μέσων εισοδημάτων των δυο χωρών (μ_x - μ_y)

- $H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$
- $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq 0$

2.Επιλογή κατάλληλης συνάρτησης ελέγχου για τη διαφορά των μέσων δυο πληθυσμών

$$TS = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^{*2}}{n_x} + \frac{s_y^{*2}}{n_y}}} \tag{10}$$

Συνέχεια

3.Κανόνας απόρριψης της Μηδενικής Υπόθεσης του δίπλευρου ελέγχου για τη διαφορά των μέσων εισοδημάτων των δυο χωρών

$$TS > t_{v,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{11}$$

ή

$$TS > -t_{v,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{12}$$

$\Leftrightarrow$

$$|TS| > t_{v,1-\frac{\alpha}{2}} \tag{13}$$

όπου $v = \dfrac{\left(\dfrac{s_x^{*2}}{n_x} + \dfrac{s_y^{*2}}{n_y}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_x^{*2}}{n_x}\right)^2}{n_x - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_y^{*2}}{n_y}\right)^2}{n_y - 1}}$