

①

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ (ΚΑΙ Δ.Ε.) ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΣ
ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΣΩΝ ΔΥΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ
ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ ΠΟΥ ΚΑΤΑΜΕΜΟΝΤΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΖΕΥΓΗ

(ΕΙΔ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ)

ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΟΙ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ
ΠΛΗΘΥΣΜΟ Χ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ
ΑΠΟ ΑΥΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟ
Υ, ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΕΣΤΑ 2 ΤΥΧΑΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΥΣ.
ΑΥΤΟ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΓΙΑΤΙ ΟΙ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΑ 2 Τ.Δ. ΕΧΟΥΝ ΕΠΙΛΕ-
ΓΕΙ ΚΑΤΑ ΖΕΥΓΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΚΑΠΟΙΟ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ
ΑΠΟΜΟΝΩΣΟΥΜΕ. ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΕΠΑΝΑΛΑΜ-
ΒΑΝΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΔΕΝ

2

ΜΙΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΕΙΔ. ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΙΝΑΙ
ΑΥΤΗ ΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΤΗ-
ΡΗΣΕΩΝ, ΟΠΟΥ "ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ"
ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΟΤΙ ΟΙ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΓΙΝΩΝΤΑΙ
ΣΤΑ ΙΔΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ (Ή ΑΤΟΜΑ).

ΙΑΤΡΙΑ ΠΑΡ. ΤΕΤΟΙΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ:

1) ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΜΕΦ ΦΑΡΜΑΚΟ ΓΙΑ ΧΟΛΗΣΤΕΡΙΝΗ
ΤΟ ΟΠΟΙΟΝ Α ΕΛΑΤΩΝΕΙ ΤΟΝ ΚΙΝΔΥΝΟ
ΚΑΡΔΙΑΚΗΣ ΠΡΟΣΒΟΛΗΣ. ΟΜΩΣ Η ΧΟΛΗΣΤΕΡΙ-
ΝΗ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΩΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ. ΑΛΛΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΕΙΝΑΙ
ΗΛΙΧΙΑ, ΚΑΠΝΙΣΜΑ, ΑΡΤΗΡΙΑΚΗ ΠΙΕΣΗ,
ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΩΤΗΤΑ, ΚΛΠ. ΓΙΑΥΤΟ ΑΝ
ΕΠΙΛΕΓΑΜΕ ΔΥΟ ΑΜΕΞΑΡΤΗΤΑ Τ. Δ. ΟΙ
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΘΑ ΕΙΧΑΝ "ΜΕΓΑΛΕΣ"
ΤΥΠΙΚΕΣ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΜΙΞΕΙΣ
ΜΕΡΟΣ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΔΕΝ ΘΑ ΟΦΕΙΛΟΝΤΑΝ
ΣΤΟΝ (ΣΤΟΥΣ) ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ (ΤΕΣ) ΠΟΥ ΘΕΛΟΥ-
ΜΕΝΑ ΕΞΕΤΑΣΟΥΜΕ.

3)

ΓΙΑ ΝΑ ΤΟ ΑΠΟΦΥΓΟΥΜΕ ΑΥΤΟ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ
Τ.Δ. ΑΠΟ ΑΤΟΜΑ ΜΕ ΤΑ ΙΔΙΑ ΠΕΡΙΠΟΥ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟ ΧΟΡΙΖΟΥΜΕ ΣΕ
ΔΥΟ ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΙΣΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΤΣΙ
ΟΣΤΕ ΚΑΘΕ ΑΤΟΜΟ ΤΗΣ ΕΛΕΓΚΟΜΕΝΗΣ
ΟΜΑΔΑΣ ΝΑ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΙ ΣΕ ΑΤΟΜΟ ΤΗΣ
ΟΜΑΔΑΣ ΠΟΥ ΘΑ ΥΠΟΣΤΕΙ ΤΗΝ ΘΕΡΑΠΕΙΑ.
(ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗ ΜΕΒΑΣΗ ΗΛΙΚΙΑ, ΕΠΙΠΕΔΟ
ΧΟΛΗΣΤΕΡΙΝΗΣ, ΣΥΝΗΘΕΙΕΣ ΚΑΤΗΜΙΣΜΑΤΟΣ,
ΑΡΤΗΡΙΑΚΗ ΠΙΕΣΗ, --).

2) ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.
ΣΤΟ ΠΑΡ. ΑΥΤΟ ΘΕΛΟΥΜΕ ΝΑ ΕΛΕΓΕΟΥΜΕ
ΚΑΙ ΝΑ ΣΥΓΚΡΙΝΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΟΙΟΤΗΤΑ
2 ΔΙΑ ΦΟΡΕΤΗΝ ΛΑΔΙΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ
ΑΝ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΣΑΜΕ ΤΟ ΛΑΔΙ Α ΣΤΟ
1^ο Τ.Δ. ΚΑΙ ΤΟ ΛΑΔΙ Β ($\neq A$) ΣΤΟ
2^ο Τ.Δ. ΘΑ ΕΙΧΑΜΕ ΤΟ ΙΔΙΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΟΠΩΣ ΚΑΙ ΣΤΟ 1^ο ΠΑΡΑ-
ΔΕΙΓΜΑ.

④

ΑΥΤΟ ΘΑ ΣΥΜΒΑΙΝΕ ΔΙΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΚΑΙ
ΑΛΛΟΙ ΠΑΡΑΓΩΜΕΣ ΟΙ ΟΠΟΙΟΙ ΘΑ ΕΠΗΡΕΑΣΟΥΝ
ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΟΠΩΣ

ΚΥΒΙΣΜΟΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ, ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ
ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ, ΚΛΠ. ΓΙΑ ΑΥΤΟ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ
ΕΝΑ ΜΟΝΟ Τ.Δ. ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟ-
ΖΟΥΜΕ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΤΟ Τ.Δ. ΑΥΤΟ

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΣ
ΤΑ ΙΔΙΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΑ ΔΥΟ ΦΟΡΕΣ (ΜΙΑ
ΦΟΡΑ ΜΕ ΛΑΔΙ Α ΚΑΙ ΜΙΑ ΦΟΡΑ ΜΕ
ΛΑΔΙ Β). ΤΡΟΠΟΣ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ: ΜΕΣΗ

ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ. (ΦΡΟΝΤΙΖΟΥΜΕ

ΦΥΣΙΩΝΑ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΥΣ ΟΔΗΓΟΥΣ

ΚΑΙ ΤΙΣ ΙΔΙΕΣ ΣΥΜΦΩΝΕΣ ΟΔΗΓΗΣΗΣ

ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΥΟ ΕΙΔΗ ΛΑΔΙΟΥ).

5

• ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΕΣΤΩ ΤΑ ΖΕΥΓΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

(X_i, Y_i) - ΑΦΟΥ ΤΑ Τ.Δ. ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ

ΑΜΕΞΑΡΤΗΤΑ - ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΗΝ

ΔΙΑΦΟΡΑ $D_i = X_i - Y_i$ ΓΙΑ $i = 1, \dots, n$

(ΔΗΛΑΔΗ ΕΧΟΥΜΕ ΤΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

$D_1 = X_1 - Y_1, \dots, D_n = X_n - Y_n$).

ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΛΕΓΧΟ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΣΩΝ ΤΩΝ 2 ΠΗΓΩΝ

μ_x ΚΑΙ μ_y ΟΣΤΕ ΕΞΗΣ:

$H_0: \mu_x = \mu_y$ ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ ΜΕ

$H_0: \mu_D = \mu_x - \mu_y = 0$

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΟΤΙ $X \sim N$ ΚΑΙ $Y \sim N$
ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ $\Rightarrow \begin{matrix} D \\ \parallel \\ X - Y \end{matrix} \sim N$

$H_1: \mu_D < 0, \mu_D > 0, \mu_D \neq 0$.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D^* / \sqrt{n}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$$

(ΑΓΝΟΣΕΙΣ ΤΗ ΘΥΣΜΙΑ ΜΕΣ
ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ)

6

Υπo $H_0: T = T_0 = \frac{\bar{D}}{S_D^*/\sqrt{m}} = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{m-1}}$

$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{m}$, $S_D^{*2} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (D_i - \bar{D})^2$

$S_D^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (D_i - \bar{D})^2$

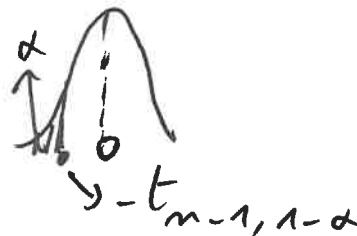
$H_0: \mu_D = 0$

$H_1: \mu_D < 0$

H_0 ΣΕ ΕΠΙΠ. ΣΗΜ. α ΑΝ

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

$T_0 < -t_{m-1, 1-\alpha}$ (ή ΑΝ $\bar{D} < -t_{m-1, 1-\alpha} \frac{S_D^*}{\sqrt{m}}$)



$H_0: \mu_D = 0$

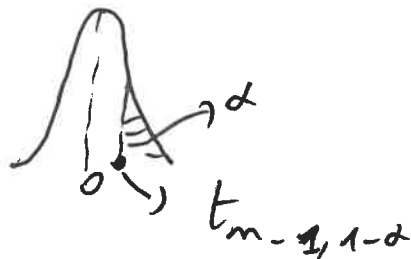
$H_1: \mu_D > 0$

H_0 ΣΕ ΕΠΙΠ. ΣΗΜ. α ΑΝ

ΚΑΝΟΝΑΣ

ΑΠΟΦΑΣΗΣ

$T_0 > t_{m-1, 1-\alpha}$ (ή ΑΝ $\bar{D} > t_{m-1, 1-\alpha} \frac{S_D^*}{\sqrt{m}}$)



7

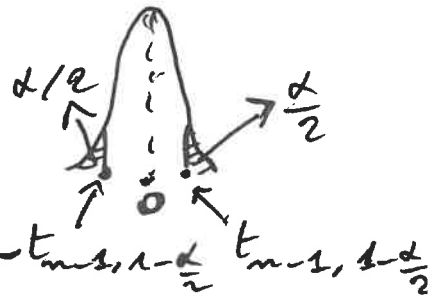
$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D \neq 0$$

Η/Σ ΣΕ ΕΠΙΠ. ΣΗΜ. & ΑΝ

$$T_0 < -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ή} \quad T_0 > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\left(\text{ή ΑΝ: } \bar{D} < -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D^*}{\sqrt{n}} \right. \\ \left. \text{ή } \bar{D} > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D^*}{\sqrt{n}} \right)$$



ΓΙΑ "ΜΕΓΑΛΑ" Τ.Δ. ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ

ΠΑΡΑΤΑΝΟ ΕΛΕΓΧΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΩΣ

ΑΝ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ (ΠΛΗΘΥΣΜΟΙ) ΔΕΝ

ΕΙΝΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΟΣ (ΚΑΝΟΝΙΚΟΙ).

(ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΓΙΑ ΔΕΙΓΜΑΤΩΣ ΜΕΓΕΘΗ
>, 30) → ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΗ Κ.Ο.Θ.

• ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

ΕΝΑ 100(1-α)% Δ.Ε. ΓΙΑ μ_D ΕΙΝΑΙ;

$$\bar{D} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D^*}{\sqrt{n}}$$

$$\text{ή ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ } \bar{D} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s_D}{\sqrt{n-1}}$$

8

ΠΑΡ. ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΕΙΔΩΝ ΛΑΔΙΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ.

ΕΣΤΟ

X_i : ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ i ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕ ΛΑΔΙ Α (Km/l)

Y_i : ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ i ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΜΕ ΛΑΔΙ Β (Km/l)

ΠΑΡΑΓΟΜΕΣ ΤΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΕΠΗΡΕΑΣΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΒΕΝΖΙΝΗΣ (ΕΠΙΤΕΛΕΤΟ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΛΑΔΙΩΝ) ΕΙΝΑΙ:

ΜΠΟΥΖΙ, ΦΙΛΤΡΑ ΑΕΡΑ, ΛΑΔΙΟΥ, ΒΕΝΖΙΝΗΣ, ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΣΗ ΕΛΑΣΤΙΩΝ, --- (ΓΙΑ ΤΟ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΜΕ ΤΟ ΙΔΙΟ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ.)

	ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ			
	1	2	3	4
X_i	19.77	18.90	20.20	16.29
Y_i	18.91	18.21	18.84	16.92
D_i	0.86	0.69	1.36	-0.63

(ΚΑΘΕ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ ΔΙΑΝΥΕΙ ΤΗΝ ΙΔΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ)

9

ΘΕΤΟΥΜΕ ΟΤΙ ΚΑΙ Χ ΚΑΙ Υ $\sim N$.

(ΕΔΩ ΕΧΟΥΜΕ "ΜΙΚΡΟ" Τ.Δ.) $n=4$

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\bar{D} = 0.645$ ΚΑΙ $S_D^{*2} = 0.503$
(ΔΗΛΑΔΗ $S_D^* = 0.709$)

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ:

$$H_0: \mu_D = 0$$

Επιπ. ΣΗΜ. $\alpha = 5\%$

$$H_1: \mu_D \neq 0$$

$$T_0 = \frac{0.645}{(0.709/\sqrt{2})} = 1.82$$

$$\text{ΚΑΙ } t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{3, 0.975} = 3.182$$

ΑΦΟΥ $-3.182 < T_0 < 3.182 \Rightarrow$ ~~ΔΕΝ Η/ΣΕ~~ Επιπ. ΣΗΜ. 5%

ΣΥΜΠΕΡΣ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΡΧΕΤΑ ΙΣΧΥΡΕΣ
ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΠΟΥ ΜΑ ΔΕΙΧΝΟΥΝ ΟΤΙ

ΤΑ ΔΥΟ ΚΑΔΙΑ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΣΗΜΑΝ-
ΤΙΝΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ (ΣΕ ΕΠΙΠ. ΣΗΜ. 5%).

95% ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΕΔΟΥΜΗΣ ΓΙΑ μ_D

$$0.645 \pm \underset{3.182}{t_{3, 0.975}} \left(\frac{0.709}{\sqrt{2}} \right)$$
$$= [-0.485, 1.775]$$

ΑΦΟΥ 0 ΕΣΤΟ Δ.Ε.
 \Rightarrow ΙΔΙΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΜΕ ΕΛΕΓΧΟ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ