(1)

ΚΑΤΑΝΟΜΗ Poisson

ΑΝΑΦΕΡΕΤΑΙ ΣΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΗ ΚΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ (ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ: $n \geq 50$ ΚΑΙ $np < 5$).

ΕΣΤΩ ΟΤΙ X = ΔΙΑΚΡΙΤΗ Τ.Μ. ΚΑΙ ΟΤΙ ΠΑΙΡΝΕΙ ΤΙΜΕΣ $0, 1, 2, \ldots$

ΚΑΙ $X \sim$ Poisson $P(\lambda)$, λ = ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ X ΕΙΝΑΙ $f(x) = P(X = x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$

ΜΕ $\lambda > 0$ (λ ΕΙΝΑΙ Η ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ)

Η ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=x)$$

②

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΟΠΟΙΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΤΑΙ P:

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΒΛΑΒΩΝ ΜΗΧΑΝΗΣ ΣΕ ΚΑΠΟΙΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΧΡΟΝ. ΔΙΑΣΤΗΜΑ, ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΛΑΘΩΝ ΑΝΑ ΣΕΛΙΔΑ ΒΙΒΛΙΟΥ, ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΑΡΙΘ. ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΝΟΥΝ ΑΝΑ ΛΕΠΤΟ ΑΠΟ ΣΤΑΘΜΟ ΔΙΟΔΙΩΝ, ΚΛΠ---

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ Poisson

ΕΧΕΙ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ:

1) Ο ΑΡΙΘ. ΤΩΝ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ ΠΟΥ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΣΥΜΒΟΥΝ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΡΙΘ. ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ ΣΕ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

2) Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΙΣΟΥ ΜΗΚΟΥΣ.

3

3) Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΕ ΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΗ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ.

4) ΑΝ ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΕΝΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΑΠΟ ΜΙΑ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ ΠΛΗΣΙΑΖΕΙ ΣΤΟ ΜΗΔΕΝ

Ο ΑΡΙΘ. ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ ΣΕ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ POISSON $\sim$ ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

ΟΣΟΝ ΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ $f(x)$, ΙΣΧΥΟΥΝ ΦΥΣΙΚΑ ΟΙ ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ $f(x) \geq 0$ ΚΑΙ $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$.

- $f(x) \geq 0 \rightarrow$ ΦΑΙΝΕΤΑΙ ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΟ $f(x)$
- $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x}}{x!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

④

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ

• ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ

$$E(X) = \mu = \sum_{x \geq 0} x \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x \geq 1} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \lambda}$$

• ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟ ΤΡΟΠΟ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ

$$E(X^2) = \sum_{x \geq 0} x^2 \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} \right)$$

$$= \sum_{x \geq 1} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{x \geq 1} (x-1) \frac{\lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!}}_{E(X) = \lambda} + \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x \geq 1} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{\lambda}}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{VAR(X) = \lambda}$$

(5)

ΔΗΛΑΔΗ $E(X) = VAR(X) = \lambda$

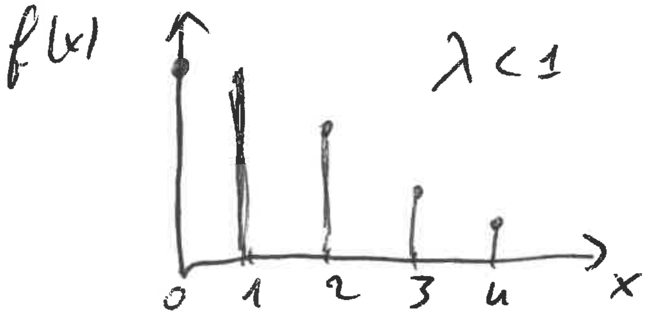
$\rightarrow$ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ POISSON

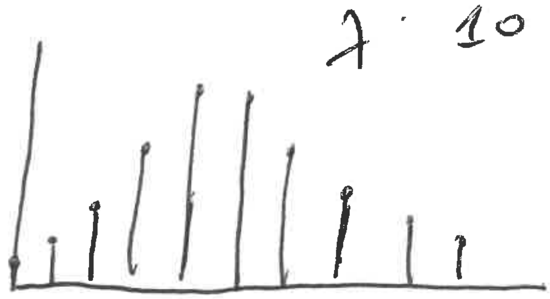
• ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

$$\beta_1 = \frac{1}{\lambda}$$

ΓΙΑ $\lambda < 1 \rightarrow$ ΜΕΓΑΛΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

ΟΣΟ λ ΑΥΞΑΝΕΙ ΤΟΣΟ ΠΙΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΓΙΝΕΤΑΙ Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ





ΙΔΙΟΤΗΤΑ

ΕΣΤΩ $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ΚΑΙ $X_2 \sim P(\lambda_2)$ ΚΑΙ

X_1 ΚΑΙ X_2 ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ Τ.Μ.

ΤΟΤΕ $X = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΑΥΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΕΤΑΙ ΓΙΑ > 2 Τ.Μ.

⑥

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ Poisson

ΕΣΤΩ $X \sim P(\lambda)$

ΤΟΤΕ ΙΣΧΥΕΙ $\dfrac{P(X=x)}{P(X=x-1)} = \dfrac{\lambda}{x}$

(ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ Η Τ.Μ. Χ ΤΗΝ Poisson)

Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΣΤΟΝ ΕΥΚΟΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ Poisson.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ Poisson

ΠΑΡ: ΕΣΤΩ ΟΤΙ Ο ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΣΤΑΘΜΟ ΔΙΟΔΙΩΝ Τ.Ο ΣΑΒΒΑΤΟ ΤΟ ΑΠΟΓΕΥΜΑ ΕΙΝΑΙ 4.9 ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΑ/ΛΕΠΤΟ.

ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΞΥ 5 ΚΑΙ 5.01 ΤΟ ΑΠΟΓΕΥΜΑ ΤΟΥ ΣΑΒΒΑΤΟΥ ΝΑ ΕΧΟΥΝ ΠΕΡΑΣΕΙ ΑΠΟ ΤΑ ΔΙΟΔΙΑ

7

1) ΚΑΝΕΝΑ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ
2) ΕΝΑ ______
3) ΤΟ ΠΟΛΥ ΠΕΝΤΕ
4) ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΠΕΝΤΕ

ΑΠ. Ο ΑΡΙΘ. ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ X ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΙΟΔΙΑ ΜΕΤΑΞΥ 5 ΚΑΙ 5.01

~ ΚΑΤΑΝΟΜΗ Poisson.

ΕΞΙΣΩΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΑΡΙΘ. ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ $\bar{x}=4.9$ ΜΕ ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ λ ΤΗΣ POISSON $\rightarrow$ $\lambda = 4.9$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ:

1) $P(X=0) = e^{-4.9}\dfrac{(4.9)^0}{0!} = 0.0074$

2) $P(X=1) = e^{-4.9}\dfrac{(4.9)^1}{1!} = 0.0365$

3) $P(X \leq 5) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=5)$
$= f(0) + f(1) + \dots + f(5)$
$= \dots = 0.63 = F(5) =$ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

4) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5)$
$= 1 - (f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4))$
$= \dots = 0.5418$

8

* ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΑΜΕ ΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΟΥΜΕ (ΕΥΚΟΛΑ) $P(X=1)$, $P(X=2)$, ΚΛΠ... ΜΕ ΒΑΣΗ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

ΠΑΡ: $\frac{P(X=1)}{P(X=0)} = \frac{4.9}{1}$

$$\Rightarrow P(X=1) = (4.9)\underbrace{P(X=0)}_{0.0074}$$

$$\Rightarrow P(X=1) = 0.0365$$

(ΒΡΗΚΑΜΕ $P(X=1)$ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΓΙΑ $X=0$ ΔΗΛΑΔΗ $P(X=0)$)

ΚΛΠ...

<u>ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΜΕ POISSON</u>

<u>ΠΑΡ</u>: ΕΣΤΩ ΟΤΙ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΚΑΠΟΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΙΝΑΙ 0.05.

1) ΠΟΙΑ Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΣΕ Τ.Δ. 60 ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ 2 ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΙΚΑ;

(9)

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΥΤΗ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΜΕ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ, POISSON, ΚΑΙ ΝΑ ΣΥΓΚΡΙΘΟΥΝ ΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.

ΑΠ.

ΕΔΩ $n = 60 > 50$ ΚΑΙ $np = 60 \times (0.05)$

$= 3 < 5$

ΣΥΝΕΠΩΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ POISSON

- ΜΕ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

ΕΣΤΩ X = ΑΡΙΘ. ΕΛΑΤΤΩΜΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ, $X \sim B(60, 0.05)$

ΖΗΤΑΜΕ $P(X=2) = C_{60}^{2} (0.05)^2 \cdot (0.95)^{58}$

$= 0.2257$

- ΜΕ POISSON → ΕΞΙΣΩΝΟΥΜΕ ΤΟΝ ΜΕΣΟ ΜΕ ΑΥΤΟΝ ΤΗΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ, ΔΗΛΑΔΗ

$X \sim P(3)$

$\lambda = np = 60 \times 0.05 = 3$

ΖΗΤΑΜΕ $P(X=2) = \dfrac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = 0.224$

(10)

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΟΙ ΤΙΜΕΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΕΙΝΑΙ ΚΟΝΤΑ → ΚΑΛΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

* ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΚΑΙ ΕΠΙΚΡΑΤΕΣΤΕΡΗ ΤΙΜΗ (ΜΕ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ)

ΕΔΩ $p = 0.05$, $q = 0.95$

$3 - 0.95 < x^* < 3 + 0.05$

$2.05 < x^* < 3.05 \Rightarrow x^* = 3$

2) ΝΑ ΒΡΕΘΟΥΝ $E(X)$ ΚΑΙ $VAR(X)$ ΜΕ ΤΙΣ 2 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

- ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

$E(X) = np = 60 \times 0.05 = 3$

$VAR(X) = np(1-p) = 2.85$

- POISSON

$E(X) = \lambda = 3$

$VAR(X) = \lambda = 3$