1

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΜΟΡΦΗΣ

= ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΣΤΟΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ- Ο ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ ΚΑΙ Η ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΝ ΑΠΟ ΜΟΝΟΙ ΤΟΥΣ ΝΑ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΟΥΝ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (ΒΛ. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΣ ΣΕΛΙΔΑΣ)

ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ:

ΡΟΠΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΡΟΠΗ r ΤΑΞΗΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΜΗ α: $\displaystyle {}_{\alpha}M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \alpha)^r$

→ ΣΤΑΘΜΙΚΗ $(n_1 + \dots + n_k = n)$

$$ {}_{\alpha}M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)^r \rightarrow \text{ΑΠΛΗ}$$

ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΜΑΣΤΕ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΠΟΥ $\alpha = 0$ (ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ Ή ΡΟΠΗ ΕΠΙ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ) ΚΑΙ ΓΙΑ $\alpha = \overline{X}$ (ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ)

②

ΑΠΛΗ ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ $(\alpha=0)$

$${}_0M_1 = m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad 1^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$${}_0M_r = m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{r} \qquad r^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ $(\alpha=0)$

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i X_i \qquad 1^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i X_i^{r} \qquad r^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΙ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΤΥΠΟΙ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΙ ΑΜΕΣΑ. ΓΙΑ ΣΥΝΕΧΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΑ X_i ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ.

ΑΠΛΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ $(\alpha=\overline{X})$

$${}_{\overline{X}}M_1 = \mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}) \qquad 1^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

$${}_{\overline{X}}M_2 = \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \qquad 2^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

$${}_{\overline{X}}M_r = \mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^r \qquad r^{ης} \text{ ΤΑΞΗΣ}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

③

ΣΤΑΘΜΙΚΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ $(\alpha = \bar{X})$

$${}_{\bar{X}}M_1 = \mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i (X_i - \bar{X})$$ 1ης ΤΑΞΗΣ

$${}_{\bar{X}}M_2 = \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i (X_i - \bar{X})^2$$

$$\vdots$$

$${}_{\bar{X}}M_r = \mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K} n_i (X_i - \bar{X})^r$$ rης ΤΑΞΗΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: $\mu_1 = 0$ (ΙΔΙΟΤΗΤΑ $\bar{X}$)

$\mu_2 = \sigma^2$ (ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ)

$m_1 = \bar{X}$

$\mu_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2$

ΔΙΟΤΙ $= \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2$ (ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΩΝ ΡΟΠΩΝ: ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΕΥΚΟΛΑ ΝΑ ΔΟΥΜΕ ΟΤΙ $\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$

ΠΑΡ.

X_i	2	4	5	6
n_i	10	40	30	20

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΡΟΠΗ 3ης ΤΑΞΗΣ;

$$\mu_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_i (X_i - \bar{X})^3$$

$$n = 100, \quad \bar{X} = m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i X_i}{n}$$

$$= \frac{20 + 160 + 150 + 120}{100} = 4.5$$

$$\Rightarrow \mu_3 = \frac{1}{100}\left[10(2-4.5)^3 + 40(4-4.5)^3 + 30(5-4.5)^3 + 20(6-4.5)^3\right]$$

$$= \frac{-90}{100} = \boxed{-0.9}$$

④

ΑΡΧΙΚΗ ΡΟΠΗ 3ης ΤΑΞΗΣ;

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i X_i^3$$

$$= \frac{1}{100} \left[(10 \times 8) + (40 \times 64) + (30 \times 125) + (20 \times 216) \right] = ---$$

- ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (ΔΕΙΚΤΕΣ) ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΟΝΟΚΟΡΥΦΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

α) ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ PEARSON

$$S_K = \frac{\bar{X} - T}{\sigma}$$ → 0 → ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ <0 → ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ >0 → ΘΕΤΙΚΗ

$$S'_K = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma}$$ → 0 → ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ <0 → ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ >0 → ΘΕΤΙΚΗ

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$ → 0 → ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ ≠0 → ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ (ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΑΝ ΕΙΝΑΙ >0 Ή <0)

β) ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ FISHER

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$$ → 0 → ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ <0 → ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ
→ >0 → ΘΕΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

5

ΠΑΡ

X	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
n	5	20	35	25	15

ΜΟΡΦΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ?

S_K ; S_K'

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $M = 37.14$, $\bar{X} = 37.5$ ΚΑΙ

$T = 36$

ΑΦΟΥ $T < M < \bar{X} \Rightarrow$ ΘΕΤΙΚΗ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΓΙΑ S_K ΚΑΙ S_K' ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ σ.

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ $\sigma = 10.9$

$\rightarrow S_K = 0.1376$ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΘΕΤΙΚΑ

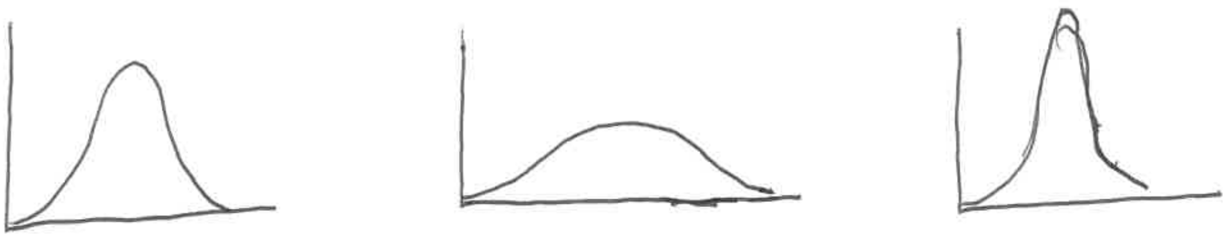
$S_K' = 0.099$ (ΜΑΣ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΝΟΥΝ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ)

(ΣΤΟ ΣΠΙΤΙ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕ γ_1)

* ΓΙΑ ΝΑ ΔΟΥΜΕ ΑΝ ΕΧΟΥΜΕ ΕΛΑΦΡΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΕΛΕΓΞΟΥΜΕ ΑΝ $S_K \simeq S_K'$ ($\rightarrow$ ΒΛ. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΣΧΕΣΗ PEARSON)

ΓΙΑ ΤΟ ΠΑΡ. ΒΛΕΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΙΣΧΥΕΙ $S_K \simeq S_K'$ ΚΑΙ ΣΥΝΕΠΩΣ ΕΧΟΥΜΕ ΕΛΑΦΡΑ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ (ΣΥΝΕΠΩΣ $\bar{X}$ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΘΕΩΡΗΘΕΙ ΩΣ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΤΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΘΕΣΗΣ)

⑥ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (ΔΕΙΚΤΕΣ) ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ



ΛΕΠΤΟΚΥΡΤΗ: ΠΟΛΛΕΣ ΑΚΡΑΙΕΣ ΤΙΜΕΣ
→ ΥΨΗΛΟΤΕΡΗ + ΑΙΧΜΗΡΟΤΕΡΗ ΑΠΟ ΜΕΣΟΚΥΡΤΗ
→ "ΒΑΡΕΙΕΣ" ΟΥΡΕΣ

ΠΛΑΤΥΚΥΡΤΗ → ΠΙΟ "ΚΟΝΤΗ" ΑΠΟ ΜΕΣΟΚΥΡΤΗ
ΠΙΟ "ΛΕΠΤΕΣ" ΟΥΡΕΣ ΑΠΟ ΜΕΣΟΚΥΡΤΗ (ΛΙΓΕΣ ΑΚΡΑΙΕΣ ΤΙΜΕΣ)

- ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΥΡΤΩΣΗΣ PEARSON

$$B_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

- ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΚΥΡΤΩΣΗΣ FISHER

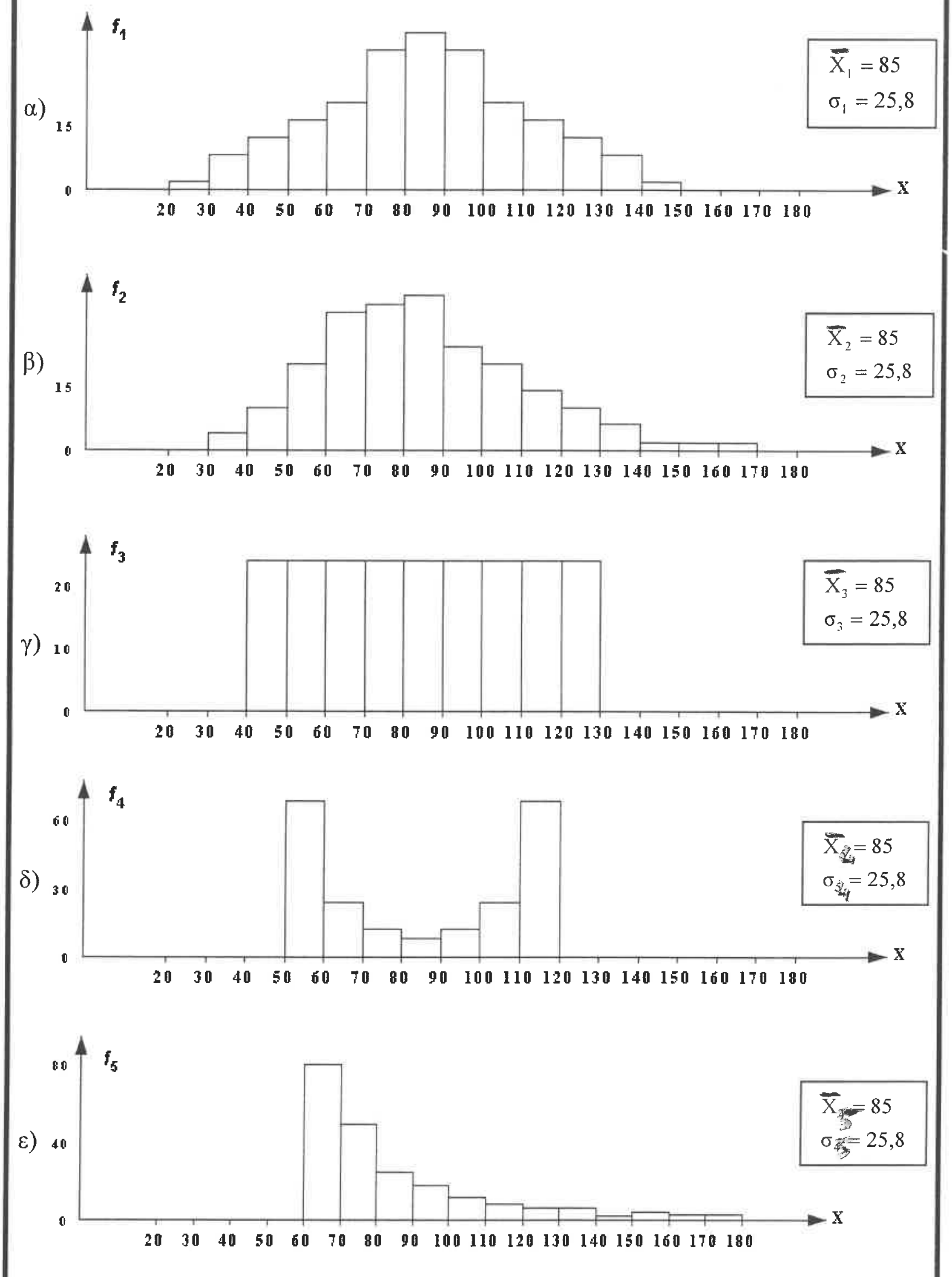
$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ:

$B_2 = 3$ ($\gamma_2 = 0$) → ΜΕΣΟΚΥΡΤΗ

$B_2 < 3$ ($\gamma_2 < 0$) → ΠΛΑΤΥΚΥΡΤΗ

$B_2 > 3$ ($\gamma_2 > 0$) → ΛΕΠΤΟΚΥΡΤΗ



σχήμα 6.34: Ιστογράμματα των κατανομών του πίνακα 6.11

Αν υπολογιστεί το πλήθος των παρατηρήσεων, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση κάθε μίας από τις πέντε αυτές κατανομές, θα διαπιστωθεί ότι :